Retour sur la page d'accueil du site ALEXANOR

SOMMAIRE

Des problèmes célèbres :

Construction à la règle et au compas
Le postulat des parallèles d'Euclide et les théorèmes de complétude et d'incomplétude de Gödel
Les 23 problèmes de Hilbert (1900 à Paris)
Les 7 problèmes du millénaire (2000 par l'institut de mathématiques Clay)

Des notions dans l'histoire avec des prolongements:

Les limites
Le calcul infinitésimal
Prolongements:
calcul différentiel
calcul intégral
Les équations
A Babylone
En Grèce
En Chine
Au Moyen Orient
En Italie
En France
Prolongements:
l'algèbre moderne
les figures dorées
le format A
Les nombres complexes
Prolongements:
Analyse complexe
Autres nombres (quaternions et octonions)
Quelques fonctions
Sinus et cosinus
Le mètre
Logarithme
Exponentielle
Dérivabilité et continuité

Les vecteurs et le produit scalaire
Les probabilités
Prolongements:
Echantillonnage
Kolmogorov
Théorie du chaos et hasard
Les ensembles infinis
L'indécidabilité

Des mathématiciens célèbres :

Abel	Fermat	Lagrange	Pythagore
Banach	Fourier	Laplace	Riemann
Cauchy	Galois	Leibniz	Weierstrass
Descartes	Gauss	Newton	
Euclide	Gödel	Pascal	
Euler	Hilbert	Poincaré	

Divers :

Bourbaki
La médaille Fields et d'autres prix
Les mathématiques en France
Quelques notations mathématiques

Des problèmes célèbres

Constructions à la règle et au compas

Quadrature du cercle
Trisection d'un angle
Duplication du cube

Il s'agit du problème des nombres constructibles.
Par exemple $\sqrt{2}$ est constructible à la règle et au compas car c'est l'hypoténuse d'un triangle rectangle et isocèle de côté 1et un tel triangle se trace à la règle et au compas.
L'ensemble des nombres constructibles contient les rationnels et est contenu dans les algébriques.
Un algébrique est un nombre qui est racine d'un polynôme à coefficients entiers.

Les nombres constructibles s'obtiennent à partir des entiers et en utilisant les 5 opérations + - * / et √ (Pierre-Laurent Wantzel en 1837)

Ainsi

$$5 + \sqrt{23 - \frac{3/2 + \sqrt{17}}{\sqrt{3} - \sqrt{\sqrt{2}}}}.$$

est constructible.

La quadrature du cercle consiste à construire un carré de même aire qu'un disque de rayon 1. Il s'agit de construire a tel que $a^2 = \pi$ soit $a = \sqrt{\pi}$.
Or π n'est pas algébrique (Ferdinand Von Lindemann en 1882) donc a n'est pas constructible.
La quadrature du cercle est donc impossible.

La trisection d'un angle consiste à partager à la règle et au compas tout angle en 3 angles égaux.
Par exemple en prenant $\pi/3$ il faudrait construire $\pi/9$ ou encore $\cos(\pi/9)$.
or $\cos(\pi/9)$ est racine d'un polynôme de degré 3 à coefficients entiers et donc n'est pas constructible.
La trisection d'un angle est donc impossible.

La duplication du cube consiste à construire un cube de volume double qu'un cube d'arête 1.
Il s'agit de construire a tel que $a^3 = 2$ donc a n'est pas constructible.
La duplication du cube est impossible.

Cas des polygones réguliers constructibles à la règle et au compas :
Il y a un théorème sur cette question :
Théorème de Gauss-Wantzel : *« Un polygone à n côtés est constructible si et seulement si n est le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre fini de nombres premiers de Fermat distincts. »*

Un nombre de Fermat étant de la forme $2^{(2^k)} + 1$ où k est un entier naturel.
Par exemple pour k=1 on obtient 5 qui est un nombre premier donc un pentagone régulier est constructible à la règle et au compas.
Pour k=2 on obtient 17 donc un polygone régulier de 17 côtés est constructible.
Les cinq nombres de Fermat premiers connus sont :
$F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, et $F_4 = 6553$
Ainsi un polygone à n côtés est constructible à la règle et au compas si :
n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, ...

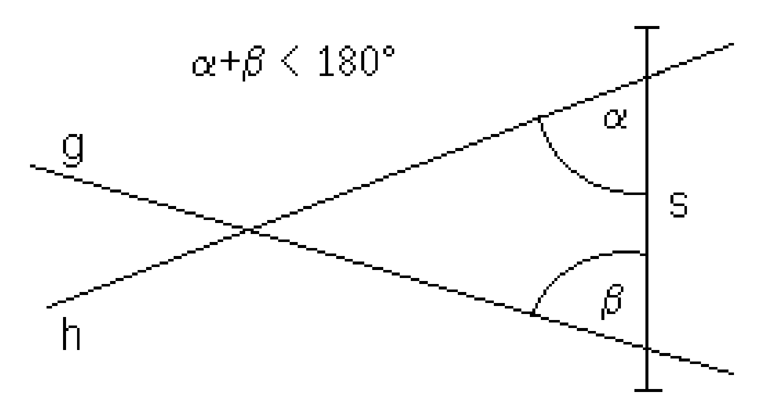
Tandis qu'il n'est pas constructible si :
n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25,...

Gauss a démontré une implication sur les 2 en 1801 :
« Si un polygone régulier possède n côtés et si n est une puissance de 2 ou est le produit d'une puissance de 2 et de k nombres de Fermat premiers différents alors ce polygone est constructible. »

Retour au sommaire

Le postulat des parallèles d'Euclide

Ce postulat bien connu « Par un point donné il ne passe qu'une et seule droite parallèle à une droite donnée » est un postulat énoncé par Euclide dont la version originale est :
« Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits. »



Au XIX[e] siècle (avec Poincaré par exemple), d'autres géométries pour lesquelles cette propriété des parallèles est fausse ont été proposées : géométries non euclidiennes par opposition à celle d'Euclide.
Dans ces géométries (hyperbolique ou sphérique) la somme des angles d'un triangle ne vaut plus 180 ° et il y a soit une infinité de parallèles soit aucune.

Il est remarquable qu'Euclide ait rajouté cet énoncé, car sans doute il n'était pas parvenu à le démontrer à partir des autres axiomes.
C'est après 2000 ans que l'on a montré que, sans, d'autres géométries cohérentes sont possibles.

Ce problème est lié à la notion de décidabilité de Gödel (XX[e] siècle) :
Un énoncé est dit décidable par rapport à une théorie axiomatique si on peut démontrer à partir de cette théorie qu'il est vrai ou faux.
Ou plus exactement si on peut le démontrer (il est dit démontrable et c'est un théorème) ou démontrer sa négation.

Dans le cas contraire il est dit indécidable ou indépendant de la théorie.
C’est justement le cas de l’énoncé des parallèles à partir des autres axiomes d’Euclide.
De plus, d’après le théorème de complétude de Gödel, en logique classique, on peut trouver des modèles de la théorie pour lesquels l’énoncé est vrai et des modèles où il est faux
Le premier théorème d’incomplétude de Gödel affirme qu’une théorie vérifiant certaines conditions est soit incohérente (il y a des énoncés qui sont à la fois vrais et faux pour cette théorie) soit incomplète (on peut construire des énoncés indécidables pour cette théorie)
Dans le cas de l’énoncé des parallèles qui est indécidable à partir des autres axiomes de la théorie d’Euclide, on peut construire des géométries pour lesquelles cet énoncé est vrai (géométrie euclidienne) et des géométries pour lesquelles il est faux (non euclidiennes)

Pour simplifier, quand un énoncé est indépendant d’une théorie, on peut alors obtenir d’autres théories cohérentes en ajoutant cet énoncé ou en ajoutant sa négation.
Attention : Il ne faut pas confondre démontrable et vrai.
Un énoncé peut être vrai pour un modèle d’une théorie mais non démontrable à partir de cette théorie.
L’énoncé des parallèles en prenant comme modèle un plan et les droites de ce plan est vrai mais pas démontrable (géométrie euclidienne).
Ce même énoncé est faux en prenant comme modèle une sphère et les grands cercles de cette sphère (géométrie sphérique).
Poincaré propose un autre modèle qui est un demi-plan pour lequel cet énoncé est faux (géométrie hyperbolique).
Un modèle d’une théorie est en quelque sorte la chair autour d’un squelette (théorie).

On peut donner d’autres exemples d’énoncés démontrables ou indécidables :

Prenons les axiomes de Peano qui définissent l’ensemble $\mathbb{N}$.
Le 5ième axiome : « Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à **N** » n’est pas autre chose que le principe de récurrence ; autrement dit, pour cette théorie, ce principe est un axiome (axiome de récurrence).
Maintenant prenons l’ensemble des axiomes qui définissent la théorie des ensembles selon Zermelo et Fraenkel (1908).On parle de la théorie ZF.
Cette théorie contient un axiome dit de l’infini qui permet de définir une

représentation de $\mathbb{N}$ à partir de cette théorie des ensembles.
Pour cette théorie le principe de récurrence est un théorème, c'est-à-dire démontrable à partir des axiomes de cette théorie.

Un autre énoncé est « l’axiome » de choix :
« Pour toute classe d'ensembles non vides et disjoints, il existe un algorithme (fonction de choix) permettant d'extraire un élément et un seul dans chaque ensemble afin de constituer un nouvel ensemble. »
Cet énoncé est indécidable pour la théorie ZF (Gödel en 1938 et Cohen en 1963).
En rajoutant cet énoncé dans l’ensemble des axiomes de la théorie ZF, qui devient donc un axiome dit de choix, on obtient la théorie ainsi plus complète appelée ZFC.
La plupart des mathématiciens utilisent cette dernière et dans plusieurs domaines mathématiques cet axiome est utilisé.

Retour au sommaire

Les vingt trois problèmes de Hilbert (1900 à Paris)

Lors du deuxième congrès international des mathématiciens, tenu à Paris en 1900, David Hilbert présenta une liste de problèmes qui tenaient jusqu'alors les mathématiciens en échec. Ces problèmes devaient, selon Hilbert, marquer le cours des mathématiques du XX[e] siècle, et l'on peut dire aujourd'hui que cela a été grandement le cas. Publiée après la tenue du congrès, la liste définitive comprenait 23 problèmes, aujourd'hui appelés les **problèmes de Hilbert** :

Problème 1 : L'hypothèse du continu est-elle vérifiée? La réponse est que dans la théorie classique des ensembles ceci est indécidable (prouvé par Gödel en 1940, qui démontre qu'on ne peut pas la réfuter, et par Cohen en 1963 qui démontre qu'on ne peut pas la prouver).

Problème 2 : Peut-on prouver la consistance de l'arithmétique? Autrement dit, est-ce que les axiomes qui définissent l'arithmétique des entiers sont non contradictoires? La réponse est donnée par Gödel en 1931 : on ne peut pas prouver la consistance de l'arithmétique en utilisant les seuls axiomes de l’arithmétique.

Problème 3 : Etant donné deux polyèdres de même volume, peut-on découper le premier polyèdre en un nombre fini de morceaux, qui sont aussi des polyèdres, de sorte qu'en réarrangeant d'une autre façon ces morceaux, on reconstitue le second polyèdre. Ce problème fut le premier à être résolu, et négativement, par Max Dehn, un élève de Hilbert, en 1902.

Problème 4 : Trouver toutes les géométries pour lesquelles la distance la plus courte entre deux points est réalisée par les segments de droite. Cette question a été résolue par George Hamel(1877-1954).

Problème 5 : Peut-on enlever l'hypothèse de dérivabilité dans la définition d'un groupe de Lie? Une réponse positive a été apportée par le théorème de Gleason-Zippin-Montgomery.

Problème 6 : Peut-on mathématiser les axiomes de la physique? Cette question est devenue rapidement obsolète, vue l'évolution divergente de ces deux disciplines (théories de la relativité, de la mécanique quantique, cinétique des gaz,...).

Problème 7 : Est-ce a^b est transcendant si a est un nombre algébrique, et si b est un nombre irrationnel? Ce problème a été résolu partiellement par Gelfond et Schneider en 1931, qui ont prouvé que c'est vrai si b est supposé en outre algébrique

Problème 8 : La conjecture de Riemann sur les zéros de la fonction Zêta est-elle vraie? En filigrane, c'est la répartition des nombres premiers qui intéresse Hilbert. Cette question est probablement la plus importante parmi les 23 questions à ne pas avoir été résolue. Elle a été reprise dans la liste des 7 problèmes du millénaire.
Solution partielle par Hardy et Weill.

Problème 9 : Etendre les problèmes de réciprocité (comme la loi de réciprocité quadratique) aux anneaux d'entiers d'un corps algébrique. Ce problème a été résolu par Artin en 1927.

Problème 10 : Existe-t-il un algorithme universel permettant de déterminer, en un nombre fini d'étapes, si une équation diophantienne admet des solutions. Matiassevich donne une réponse négative en 1970.

Problème 11 : Peut-on obtenir une classification des formes quadratiques à coefficients dans un anneau d'entiers algébriques semblable à la classification usuelle sur R (avec la signature)? Des résultats très importants sur ce problème ont été obtenus par Hasse (1929) et Siegel (1935).

Problème12 : Il s'agit d'un problème très abstrait, concernant la construction des corps de classes des corps de nombres algébriques. Il a été résolu en 1922 par Takagi.

Problème 13 : Montrer que l'on ne peut pas exprimer les solutions de l'équation générale de degré n à l'aide de fonctions continues de deux variables. Problème résolu par Kolmogorov et son étudiant Arnold en 1954.

Problème 14 : Soit K un corps, et L un corps compris entre K et $K(x_1,...,x_n)$ (corps des fractions sur K à n variables). L'intersection de L et de l'anneau de

polynômes $K[x_1,...,x_n]$ est-elle un anneau finiment engendré? Ce problème a été résolu par la négative par Nagata en 1958, qui a produit un contre-exemple après que Zariski ait traduit ce problème en termes d'invariants de certains groupes de la géométrie projective.

Problème 15 : Le principe de continuité de Poncelet affirme que les propriétés d'une figure, invariantes par certaines transformations, ne sont pas modifiées lorsque la figure prend une position limite (par exemple, si des droites deviennent parallèles,...). Ce principe a ensuite été généralisé par Schubert. La 15ème question de Hilbert était de trouver un fondement rigoureux à ce problème. Ce fut fait par Bell, en 1945.

Problème 16 : Etudier la topologie des courbes algébriques réelles et des surfaces. Seuls quelques résultats sporadiques ont été obtenus dans cette direction (Shimura en 1995).

Problème 17 : Est-ce qu'un polynôme à coefficients réels, à plusieurs variables, et toujours positif, s'écrit comme somme de carrés de fractions rationnelles? Ce problème a été résolu par l'affirmative par Artin en 1927.

Problème 18 : Quels sont les pavages possibles de l'espace, ou plus généralement de R^n, par des polyèdres tous identiques? Question résolue par Bieberbach en 1910.

Problème 19 : Déterminer si les solutions d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles régulières sont analytiques. La réponse est positive, comme l'a notamment montré Bernstein en 1929.

Problème 20 : Etudier des généralisations du problème de Dirichlet. De nombreux travaux ont été réalisés depuis sur ce sujet.

Problème 21 : Montrer qu'il existe toujours une équation différentielle linéaire vérifiant certaines conditions (appartenance à la classe de Fuchs, points singuliers et groupe de monodromie donnés). Ce problème a été résolu par la négative par Bolibruch en 1989.

Problème 22 : L'uniformisation des courbes algébriques consiste à trouver une paramétrisation des variables x et y à l'aide d'un seul paramètre. Le 22ème problème de Hilbert consistait en l'uniformisation des fonctions analytiques complexes au moyen des fonctions automorphes. Il a été résolu par Poincaré en 1907.

Problème 23 : Le problème 23, très vaste, concernait l'extension des méthodes du calcul des variations et plus généralement l'étude de la régularité des

solutions d'équations aux dérivées partielles. Ce problème fait toujours l'objet de recherches actives.

Retour au sommaire

Les sept problèmes du millénaire (2000 par l'institut de mathématiques Clay)

Le 24 mai 2000, le **Clay Mathematics Institute** (CMI) présente au Collège de France sept problèmes majeurs des mathématiques. Chacun est doté d'un prix d'**un million de dollars** pour celui qui en arriverait à bout.
Malheureusement ces problèmes ne sont pas à la portée du profane et sont plutôt un défi à la communauté scientifique dans le but de faire progresser les recherches en mathématiques, en informatique et en physique.

Problème 1 : La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer :
Quand les solutions d'une équation algébrique sont situées sur une variété abélienne, la taille du groupe de solutions rationnelles est reliée au comportement de la fonction Zeta $\zeta(s)$ associée au voisinage de s=1. Si $\zeta(1)=0$ alors il y a une infinité de solutions rationnelles et réciproquement, si $\zeta(1)\neq 0$, il y a seulement un nombre fini de solutions rationnelles.

Problème 2 : La conjecture de Hodge
Pour une certaine classe d'espace, les variétés algébriques projectives, appelées cycles de Hodge sont des combinaisons linéaires rationnelles d'objets ayant une réelle nature algébrique (les cycles algébriques).

Problème 3 : Les équations de Navier-Stokes
Le défi consiste à faire progresser les théories mathématiques liées aux équations de Navier-Stockes dans le but d'expliquer des phénomènes tel le mouvement des vagues produites par un bateau en déplacement.

Problème 4 : Le P problème et le NP problème
On appelle P problème tout problème qui consiste à trouver une liste d'éléments dans un ensemble donné et ce relativement à un critère fixé à l'avance. Le NP problème est opposé au P problème : il consiste à vérifier si une liste donnée est en adéquation avec les conditions données au préalable.

Problème 5 : La conjecture de Poincaré
La sphère de l'espace de dimension 4 est simplement connexe.
Gregori Perelman se voit décerner la médaille Fields pour avoir démontré la conjecture de Poincaré. Mais le mathématicien russe la refuse ainsi que la récompense de un million de dollars promise par la Clay Mathematics Instituts. La seule raison invoquée est qu'il se sentait isolé de la communauté

mathématique internationale.

Problème 6 : L’hypothèse de Riemann
Les solutions de l'équation ζ(s)=0 se situent le long d'une ligne droite verticale, où ζ est la fonction Zeta de Riemann.
(8[ième] problème de Hilbert)

Problème7 : La théorie de Yang-Mills
La théorie de Yang et Mills est construite sur un modèle géométrique expérimental qui décrit l'interaction forte des particules élémentaires. Elle n'est par contre pas comprise d'un point de vue théorique. Elle fait intervenir une propriété appartenant au monde de la mécanique quantique : certaines particules quantiques ont une masse positive alors que l'onde associée voyage à la vitesse de la lumière.

Retour au sommaire

Des notions dans l’histoire
Les limites
La notion de limite n’a été introduite de manière rigoureuse qu’au XIX[e] siècle avec Cauchy :
« *Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur finie, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres.* »

puis avec Weierstrass :
« On dit qu’une suite (un) de nombres réels admet pour limite le réel l si, pour tout réel strictement positif , aussi petit que l’on veut, il est possible de déterminer un entier naturel N, tel qu’au-delà du rang N, tous les termes de la suite u sont éloignés de l d’une distance inférieure ou égale à »

Au XVII[e] et au XVIII[e] siècle des mathématiciens comme Leibniz avaient une bonne idée de ce qu’était une limite :
« L’ensemble de la série renferme donc en bloc toutes les approximations, c'est-à-dire les valeurs immédiatement supérieures et inférieures, car, à mesure qu’on la considère de plus en plus loin, l’erreur sera moindre [...] que toute grandeur donnée.
avec la formule $\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\ etc..)$ »

Dans l’antiquité, cette notion était inconnue et conduisait à de nombreux paradoxes, comme ceux de Zénon.

(-490 / -430, Philosophe, disciple (fils, pour certains historiens) de Parménide qui fonda l'école d'Élée : les Éléates développèrent une philosophie fondée sur la *dialectique* (débat contradictoire susceptible de conduire à la vérité) et la *logique* affirmant l'unicité de l'Être, c'est à dire la réalité transcendante, non pas celle qui nous apparaît : l'Opinion (*doxa*) qui est trompeuse : *l'Être est, le non Être n'est pas*.)

En voici un exemple :

Achille voit une tortue en avant sur son chemin. Il se met à courir pour la rattraper mais malgré sa grande vélocité, il ne pourra y arriver, car lorsqu'Achille atteint la place qu'occupait la tortue, cette dernière a avancé; il doit donc atteindre maintenant la place qu'elle occupe alors, et ainsi de suite...

Achille ne rattrapera donc jamais la tortue !

Le paradoxe vient de « jamais » car les grecs pensent qu'un nombre infini de distances ne peut être parcouru qu'en un temps infini :
Supposons qu'en une seconde, Achille parcourt 5m, distance qui le sépare de la tortue initialement, tandis que la tortue parcourt 0,5m.
Achille parcourt une distance égale à 5(1+1/10+1/100 etc...)
La tortue, elle, parcourt 0,5(1+1/10+1/100 etc...)
Le temps écoulé est de 1+1/10+1/100 etc...
La somme infinie 1+1/10+1/100... vaut $\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$

Donc la somme infinie de distances parcourues par Achille est finie et vaut 50/9 m et est parcourue **en un temps fini** de 10/9 s
En 10/9 s, Achille aura parcouru 50/9 m, tandis que la tortue aura parcouru 5/9 m et donc Achille aura rejoint la tortue car 5+5/9=50/9 en 10/9 s.
Ce résultat nous semble logique et est confirmé par un calcul de limite.
Mais ce qui nous paraît naturel au XXIe siècle ne l'était pas au temps des grecs.

<u>Prolongements</u>
Cette notion de limite se généralise à travers les **espaces topologiques**. (Début du XXe siècle)
Dans ce cadre général les notions de suite et de convergence concernent des objets abstraits.
Ces objets peuvent être des nombres, des fonctions, des vecteurs etc...

L'unicité de la limite se perd dans certains cas. Pour une même classe d'objets, il peut y avoir plusieurs définitions de limite ou de convergence.

En ce qui concerne les notations :

$lim_{n\to\infty}(\quad)$ par Godfrey Harold Hardy (1877-1947) en 1908

$f(x)$ par Euler (1707-1783) en 1734

∞ par Wallis (1616-1703) en 1655

Retour au sommaire

Le calcul infinitésimal

La manipulation des infiniment petits a permis de résoudre les problèmes de tangente (dérivation) et de quadrature (intégration).

Ce sont Newton (1643-1727) et Leibniz (1646-1716) qui mettent en place, à peu près en même temps, le calcul infinitésimal.

D'ailleurs la controverse pour savoir qui fut le premier a fait rage de leur vivant et même après.

La querelle Newton / Leibniz

Les dernières années de **Leibniz** sont assombries par la retentissante controverse avec **Newton** sur **l'antériorité de l'invention du calcul infinitésimal**.

Dès 1699, **Newton** envoie une notification à la **Royal Society** accusant **Leibniz** de plagiat. Il continue à oeuvrer dans l'ombre et à écrire contre son collègue allemand jusqu'à ce qu'il obtienne de la **Royal Society** un rapport officiel lui accordant le titre de « premier inventeur » et condamnant **Leibniz** (1712).

En 1715, **Newton** rallume la polémique et humilie publiquement **Leibniz** lors d'une réunion de la **Royal Society**.

Cependant le monde des mathématiciens adoptera la *notation symbolique* de **Leibniz** plutôt que celle de son adversaire et sa dénomination de « calcul intégral ». La postérité établira que les deux savants étaient parvenus à des conclusions similaires, indépendamment l'un de l'autre.

Tous les deux font le lien entre les deux problèmes : la dérivée est la procédure inverse de l'intégration.

Mais comment ont-ils manipulé ces infiniment petits ?

Newton utilise les fluentes et les fluxions dont voici un exemple :

LA

METHODE DES FLUXIONS,

ET DES SUITES INFINIES.

Par M. le Chevalier NEWTON.



A PARIS,
Chez DE BURE l'aîné, Libraire, Quay des Augustins, à Saint Paul.

M. DCC XL.

Soit τ un intervalle de temps infiniment petit,
$\dot{x}.\tau$ et $\dot{y}.\tau$ sont les accroissements infiniment petits de x et y .

En remplaçant x et y par $x + \dot{x}.\tau$ et $y + \dot{y}.\tau$ dans $y = x^n$ on a :
$y + \dot{y}.\tau = (x + \dot{x}.\tau)^n$

puis en développant par la formule du binôme (qu'il a lui-même démontrée)

$$y + \dot{y}.\tau = x^n + n\tau\,.x^{n-1}\dot{x} + \frac{n(n-1)}{2}\tau^2\dot{x}^2x^{n-2} + \ \ldots$$

en retranchant $y = x^n$ et en divisant par τ

$$\dot{y} = n\,x^{n-1}\dot{x} + \frac{n(n-1)}{2}\tau\dot{x}^2x^{n-2} + \ \ldots$$

Enfin en négligeant les termes contenant τ on a :

$$\dot{y} = n\,x^{n-1}\dot{x}$$

Ici x et y sont des fluentes reliées par $y=x^n$ et les vitesses des fluentes sont des fluxions notées $\dot{x}$ et $\dot{y}$.

Remarquez que la formule finale correspond à $(x^n)' = nx^{n-1}$

Voici un exemple de la méthode utilisée par Leibniz:



ACTA
ERUDITORUM
ANNO M DC LXXXXI
publicata,
ac
POTENTISSIMO SERENISSIMO-
QUE PRINCIPI AC DOMINO
DN. JOHANNI
GEORGIO IV
S.R. IMPERII ARCHIMARE-
SCALLO & ELECTORI
&c. &c. &c.
DICATA.
Cum S. Cæsareæ Majestatis & Potentissimi Ele-
ctoris Saxoniæ Privilegiis.

LIPSIÆ,
Prostant apud J. GROSSII HÆREDES & J. F. GLEDITSCHIUM.
Excusa typis CHRISTOPHORI GUNTHERI.
Anno M DC XCI.

Il exprime par exemple le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de $y = x^2$:

$$\mathrm{d}y = (x + \mathrm{d}x)^2 - x^2 = 2x\mathrm{d}x + (dx)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x + \mathrm{d}x$$

Et enfin, en négligeant d*x* :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$

On retrouve $(x^2)'=2x$

C’est Leibniz qui est à l’origine des notations $dx\ et\ \int$
et écrit $\int dy = y$
Ce sont ces notations qui seront utilisées par la suite.
Les notations f '(x) pour la dérivée première, f "(x) pour la dérivée seconde, etc., sont introduites par Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

Dans les deux procédés des termes sont négligés.
Ils sont enlevés du calcul afin de trouver la formule finale.
Ce manque de rigueur, objet de critiques, ne put être levé que par le langage des limites.
Pour la dérivée :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h-f(a)}{h}\right) = \frac{df}{dx}(a)$$

La notation $f'(a)$ est due à Lagrange (1736-1813).
Pour l’intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

(La somme qui intervient étant la somme de Riemann)

Avant eux, Cavalieri en 1620 calcule des aires et des volumes par la méthode des indivisibles et Pierre de Fermat en 1636 calcule des tangentes par la méthode d’adégalisation.

Retour au sommaire

Prolongements

Sur les différentielles

La notion de dérivée en un point ou de *différentielle d’une fonction en a* se généralise sur des ensembles autres que ℝ.
La différentielle de f en a devient alors une application linéaire de E sur F où f est une application de E sur F , E et F étant des espaces vectoriels l’un normé l’autre topologique et a un élément de E.

Dans le cas d’une fonction f de ℝ sur ℝ dérivable en a, la différentielle de f df(a) en a est l’application linéaire qui à h associe
f’(a)h.

En notant dx l'application linéaire qui à h associe h on a alors df(a)=f'(a)dx qui est une égalité d'applications linéaires.

Les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles interviennent constamment en physique.
Leur importance est telle, qu'il y a des cours de mathématiques pures concernant ces sujets.
En terminale S, la seule équation différentielle du programme est y'=y et y(0)=1.
On cherche une fonction dont on connaît une relation entre elle et ses dérivées successives et vérifiant une ou plusieurs conditions particulières.
On parle de courbes intégrales pour les courbes représentatives des solutions.
Dans l'exemple donné, la solution est la seule fonction exponentielle.

Prenons un exemple en physique :
La loi de gravitation universelle appliquée à deux corps conduit à des équations différentielles que l'on sait résoudre (ou intégrer).
Elles permettent de démontrer, entre autres, les trois lois de Kepler.
(C'est ce que fait Newton dans ses fameux Principia, ouvrage édité en 1687 à Londres et comportant 510 pages en trois parties)
Avec trois corps les choses se compliquent singulièrement, c'est-à-dire la résolution des équations différentielles ainsi obtenues devient un problème ardu, et c'est le grand mathématicien français Henri Poincaré (1854-1912) qui démontre qu'il n'y a pas de solutions générales et démontre l'existence de solutions périodiques.
Il travaille avec succès sur ce problème des trois corps.
C'est aussi Poincaré qui écrit en 1902 un ouvrage « la science et l'hypothèse » précurseur de la relativité restreinte.

Sur les intégrales
La notion d'intégrale se généralise dans la théorie de la mesure au XXe siècle avec les mathématiciens Borel (1971-1958)6) et Lebesgue (1875-1941).
L'intégrale d'une fonction est définie par rapport à une mesure μ sur une tribu.
On écrit $\int f d\mu$ cette intégrale.
Ainsi avec cette théorie, on définit l'intégrale d'une fonction au sens de Lebesgue :

La tribu sur $\mathbb{R}$ est alors l'ensemble des boréliens engendrées par les intervalles et la mesure d'un intervalle borné est sa longueur.

Prenons par exemple la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire qui prend la valeur 1 pour un rationnel , 0 sinon.
Cette fonction n'est pas intégrable au sens de Riemann, comme on le voit en terminale S, car on ne peut pas utiliser des aires sous la courbe.

Par contre elle est intégrable au sens de Lebesgue car le point de vue de Lebesgue consiste à considérer l'ensemble des valeurs prises par la fonction ici 0 et 1et à faire le calcul suivant :

I=0.mesure $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ +1.mesure $(\mathbb{Q})$, car $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$est l'ensemble des réels dont l'image est 0 et $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des réels dont l'image est 1.

Or la mesure de $\mathbb{Q}$ vaut 0 donc I=0.

Voilà ce que disait Lebesgue sur son intégrale :

« *Imaginez que je doive payer une certaine somme ; je peux sortir les pièces de mon porte-monnaie comme elles viennent pour arriver à la somme indiquée, ou sortir toutes les pièces et les choisir selon leur valeur. La première méthode est l'intégrale de Riemann, la deuxième correspond à mon intégrale.* »

C'est aussi dans le cadre de la théorie de la mesure que ce fait le calcul des probabilités.

Ce qui peut d'ailleurs se comprendre, car une loi de probabilité sur un univers n'est pas autre chose qu'une manière de « mesurer » les chances qu'un évènement de cet univers se produise.

Ainsi l'espérance mathématique devient une intégrale pour cette mesure.

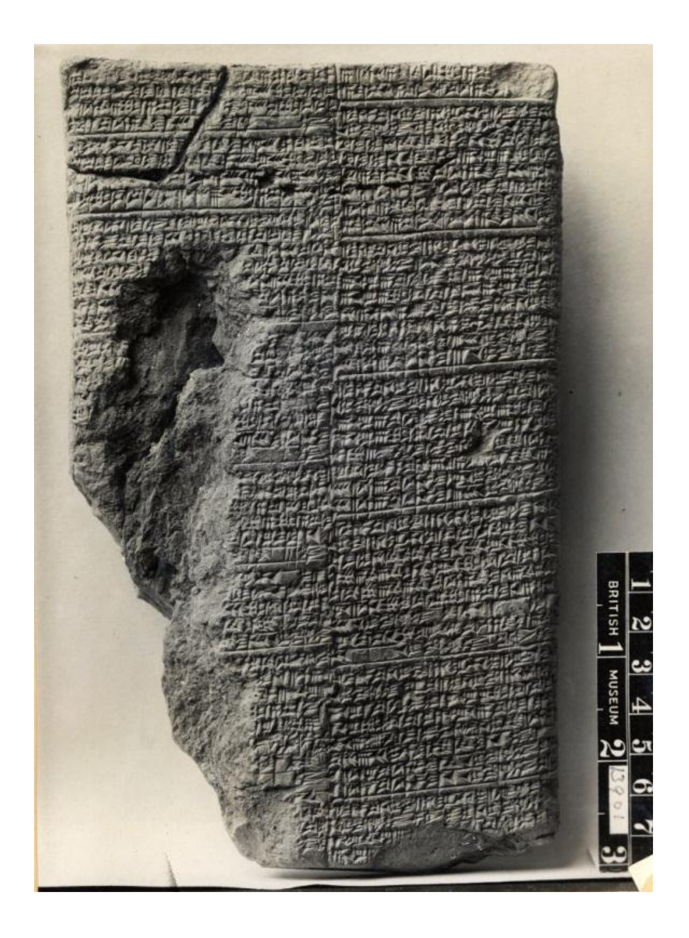
Retour au sommaire

Les équations

Dès l'antiquité de nombreux problèmes concrets, qui se traduisent en algèbre classique par des équations, ont été résolus sans pour autant donner des explications quant au procédé utilisé.

A Babylone

Dans cette tablette babylonienne,



écrite sous le règne d’Hammourabi vers 1700 avant J.C. (n°13901 au british muséum), 14 problèmes avec leur solution sont proposés.
Problème 1 qui occupent les 4 premières lignes de la tablette avec la solution
« J'ai additionné la surface et mon carré : 45 »
45 signifie ¾ car les babyloniens utilisaient un système de numération de base 60
Équation correspondante : $x + x^2 = \frac{3}{4}$
Solution proposée :

> « J'ai additionné la surface et (le côté de) mon carré : 45'.
> Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras 1 en deux : 30'.
> Tu croiseras 30' et 30' : 15'.
> Tu ajouteras 15' à 45' : 1'.
> C'est le carré de 1.
> Tu soustrairas 30', que tu as croisé, de 1 : 30', le côté du carré »

On trouve bien $x = \frac{1}{2}$

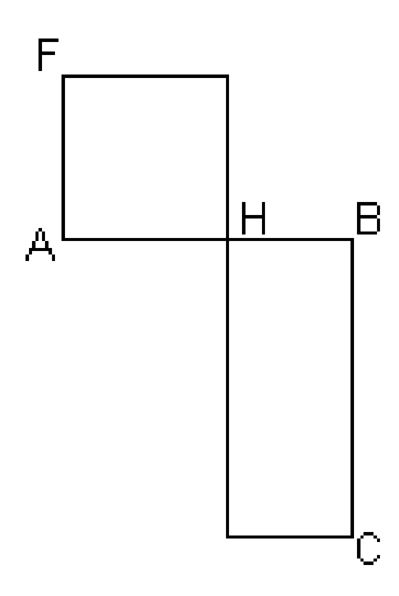
En Grèce

Euclide vers 300 avant J.C. dans ses éléments constitués de 13 livres :

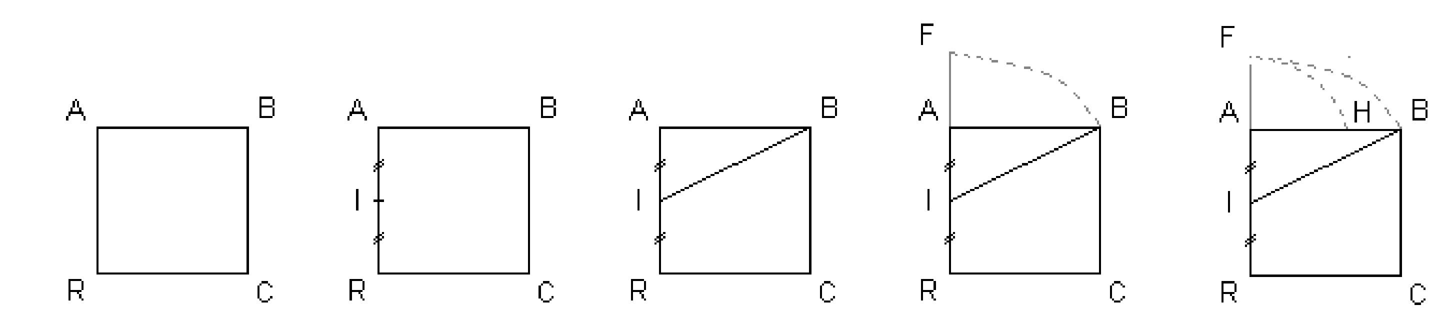
- Les livres I à IV traitent de géométrie plane :
- Les livres V à X font intervenir les proportions :

- Les livres XI à XIII traitent de géométrie dans l'espace

Dans la proposition 11 du livre II des *Eléments,* Euclide pose le problème suivant :
« Un segment [AB] étant donné, construire un point H de ce segment tel que le carré de côté AH ait la même aire que le rectangle de côtés BH et AB. »
Illustration du problème



Euclide résout le problème géométriquement. Il construit :
-le carré ABCR
-le milieu I de [AR]
-le point F de la demi-droite [RA) tel que IF=IB
-le point H de [AB] tel que AH=AF
Puis il affirme que H est le point cherché
Illustration

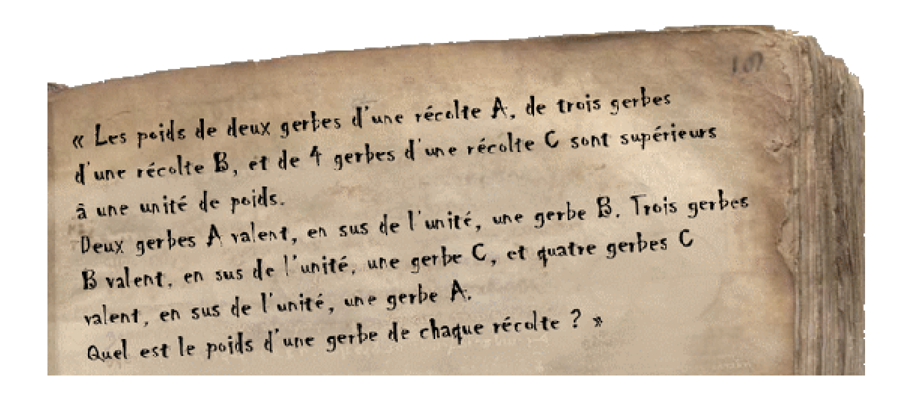


L'équation proposée est $x^2 + ax = a$ où a=AB et x=AH

On trouve $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}}$ en prenant a=1

Seule la solution positive était envisagée.

En Chine



« Les poids de deux gerbes d'une récolte A, de trois gerbes
d'une récolte B, et de 4 gerbes d'une récolte C sont supérieurs
à une unité de poids.
Deux gerbes A valent, en sus de l'unité, une gerbe B. Trois gerbes
B valent, en sus de l'unité, une gerbe C, et quatre gerbes C
valent, en sus de l'unité, une gerbe A.
Quel est le poids d'une gerbe de chaque récolte ? »

Extrait du manuscrit chinois « Neuf chapitres sur l'art du calcul », Ier siècle

Le problème revient aujourd'hui à résoudre le système d'équations :
$2x = 1 + y$
$3y = 1 + z$
$4z = 1 + x$
x, y et z étant les poids respectifs d'une gerbe de chaque récolte.

Au moyen orient

Entre 813 et 833 le mathématicien perse Al-Khawarizmi, dans l'ouvrage «**Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison »** pose les fondations de l'algèbre en étant le premier à étudier systématiquement la résolution des équations du premier et du second degré.
Plusieurs techniques sont utilisées comme « *Al-jabr* »
Al-jabr signifie *réduction*, au sens de « réduction d'une fracture », sa transcription en latin est *algebra* puis donnera algèbre. L'*al-jabr* consiste à réduire l'équation en éliminant les soustractions par addition de termes dans les deux membres. En termes modernes, cela revient à obtenir une équation à coefficients tous positifs.
Exemple :
$x^2 = 40x - 4x^2$ est transformé, par *al-jabr*, en $x^2 + 4x^2 = 40x$, puis $5x^2 = 40x$.

Il classe les équations en 6 types où des racines interviennent et qui sont équivalentes à des équations du premier ou du deuxième degré.
Chacune est exposée de manière générale puis illustrée en prenant des coefficients numériques.
Il s'appuie dans sa méthode de résolution sur des figures géométriques.

Voici un exemple :
« mal et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams »
L'équation à résoudre est $X + 10\sqrt{X} = 39$
ou encore $x^2 + 10x = 39$
en posant $x = \sqrt{X}$
qui est de la forme générale $x^2 + bx = c$

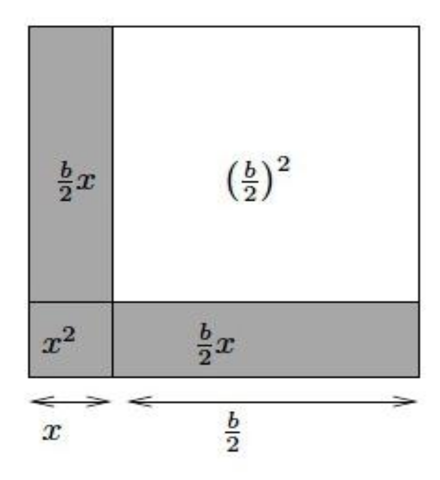
Il procède ainsi :

La solution géométrique remonte à AL KHWARIZMI (début du IXème siècle).

On inscrit un petit carré de côté x dans un coin d'un grand carré de côté $x + \frac{b}{2}$ (c'est là que se trouve l'astuce!) comme dans la figure ci-dessous. La surface grisée (qui s'appelle un gnomon, voir [2] page 48 pour une explication de ce terme) est égale à

$$x^2 + 2 \times \frac{b}{2} x \ ,$$

donc égale à c, si x vérifie l'équation (1).



La surface non grisée est un carré de côté $\frac{b}{2}$. Par conséquent la surface du grand carré est connue. Elle est égale à

$$c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \ .$$

On en déduit le côté du grand carré par une simple extraction de racine carrée et on obtient finalement

$$x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2} \ .$$

Evidemment ici on recherche une solution positive et il en existe une seule car b et c sont supposés positifs .

En Italie

Plusieurs mathématiciens au cours du XVI[e] siècle se penchent sur la résolution d'équations du 3[ième] degré et aussi du 4[ième] degré.
Trois cas du 3[ième] degré sont étudiés :

$$x^3 + px = q \text{ , } x^3 = px + q \text{ , } x^3 + q = px$$

Scipione del Ferro (1465-1526, professeur à l'Université de Bologne) résout le premier cas vers 1515 mais garde le résultat secret jusque peu avant sa mort, en 1526, où il révèle sa méthode à son élève Antonio Fior.
Il s'ensuit toute une histoire entre Fior, Tartaglia et Cardan :

« En 1535, lors d'une confrontation avec Antonio Maria Fior, on lui propose trente équations du troisième degré du type $x^3 + px = q$. Les résolutions ne se font, à l'époque, qu'à tâtons. Dans la nuit du 12 au 13 février, juste avant la date limite, Tartaglia aurait trouvé la résolution générale de ce type d'équation, et résolu les trente équations en quelques heures. Ce n'est d'ailleurs que pour l'honneur, puisqu'il renonce au prix — trente banquets successifs. Dans l'espoir de gagner d'autres concours, Tartaglia ne dévoile pas sa formule. Cardan, mis au courant de ce succès, fait venir Tartaglia à Milan et le persuade de lui révéler sa méthode, en promettant de ne jamais la dévoiler et *a fortiori* la publier. Celui-ci cède. Cardan est alors en possession de la solution générale des équations du troisième degré. Apprenant que Scipione del Ferro a donné la solution avant Tartaglia, il se sent délié de sa promesse et publie le résultat dans *Ars magna* en 1545. Dans la querelle qui s'ensuit, Tartaglia manque de perdre la vie. »

Bombelli (1526-1572) reprend les formules de Cardan dans un cadre plus général et introduit alors le nombre dont le carré est -1.
Les nombres complexes apparaissent !
Il indique les règles de calcul sur les nombres complexes : il introduit 4 notations de base, ainsi que les règles de multiplication.
piu = +1
meno = -1
piu di meno = i
meno di meno = -i
« Piu via piu di meno, fa piu di meno .... Meno di meno via meno di meno, fa meno"
(C'est Descartes qui appelle les racines carrées de nombres négatifs nombres imaginaires mais c'est Euler en 1777 qui utilise la lettre i pour $\sqrt{-1}$)

En France

Avec les mathématiciens Viette (1540-1603) et surtout Descartes (1596-1650), l'utilisation d'une notation symbolique pour les équations, comme nous les écrivons maintenant, apparaît.

A deux exceptions près : Descartes écrit xx au lieu de x^2 (les autres exposants sont utilisés) et ∝ à la place de = (symbole pourtant introduit 1557 par Recorde)

Retour au sommaire

Prolongements

De l'algèbre classique à l'algèbre moderne

Deux mathématiciens Abel (1802-1829) norvégien et Galois (1811-1832) français, tous les 2 morts très jeunes, démontrent des résultats généraux concernant la résolution générale d'équations.
Galois utilise les travaux de Lagrange (1736-1813) sur les équations polynomiales de degré supérieur à 4.
La question qui se pose est la suivante : Peut-on donner une formule générale des solutions d'une équation polynomiale à l'aide de radicaux ?
Voilà pour le second et le troisième degré :

Résolution de l'équation du second degré

Si le **discriminant** est strictement positif, l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 données par les formules suivantes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si le **discriminant** est nul, l'équation admet une racine double :

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{et} \quad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Si le **discriminant** est strictement négatif, l'équation n'admet pas de solution réelle.

« Formules de Cardan » pour le troisième degré — Les solutions $z_k \quad (0 \leq k \leq 2)$ de l'équation du troisième degré $z^3+pz+q=0$, où les coefficients *p* et *q* sont réels), sont données dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par

$$z_k = u_k + v_k$$

avec

$$u_k = j^k \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}}\right)}$$

et $3u_k v_k = -p$, d'où

$$v_k = j^{-k} \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q - \sqrt{\frac{-\Delta}{27}}\right)}$$

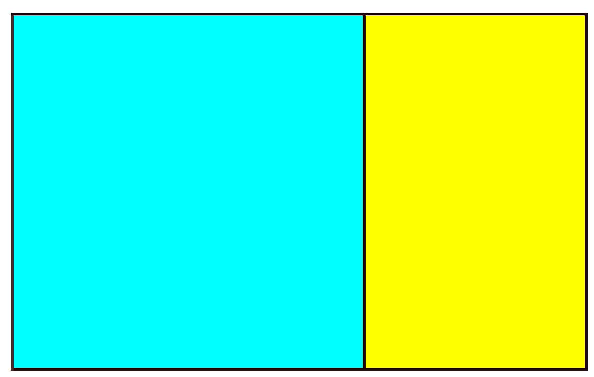
où $\Delta = -\left(4p^3 + 27q^2\right)$ est le discriminant de l'équation et où $j = e^{2i\pi/3}$.
(i) Si $\Delta > 0$, alors il y a trois solutions réelles distinctes ; (ii) Si $\Delta = 0$, alors une solution est multiple et toutes sont réelles ; (iii) Si $\Delta < 0$, alors une solution est réelle et les deux autres sont complexes conjuguées.

La réponse pour le cas général est étonnante :
C'est possible jusqu'au degré 4 inclus mais c'est impossible pour des degrés supérieurs : c'est-à-dire qu'à partir du 5[ième] degré il n'existe pas de formules générales qui donnent les solutions avec des radicaux.
On dit que ces équations sont non résolubles par radicaux.
Attention : ce n'est pas parce qu'il n'y a pas de formules générales que l'on ne sait pas résoudre de telles équations.

Ces travaux d'Abel (sur le 5[ième] degré) et de Galois (cas général) conduisent à introduire la notion des groupes.
C'est d'ailleurs Galois qui le premier utilise le mot groupe en 1830 et on parle de groupe de Galois.
Ainsi nait l'algèbre « moderne » dite linéaire où des structures (groupe, sous-groupe distingué, anneau, idéal, module, espace vectoriel etc..) sont étudiées.
Entre 1854 et 1859, Arthur Cayley publie une série de trois articles dans le *Philosophical Magazine*, qui portent sur ce qu'il a appelé « la théorie des groupes »
Retour au sommaire

Cas des figures dorées et du format papier A

Rectangle d'or :



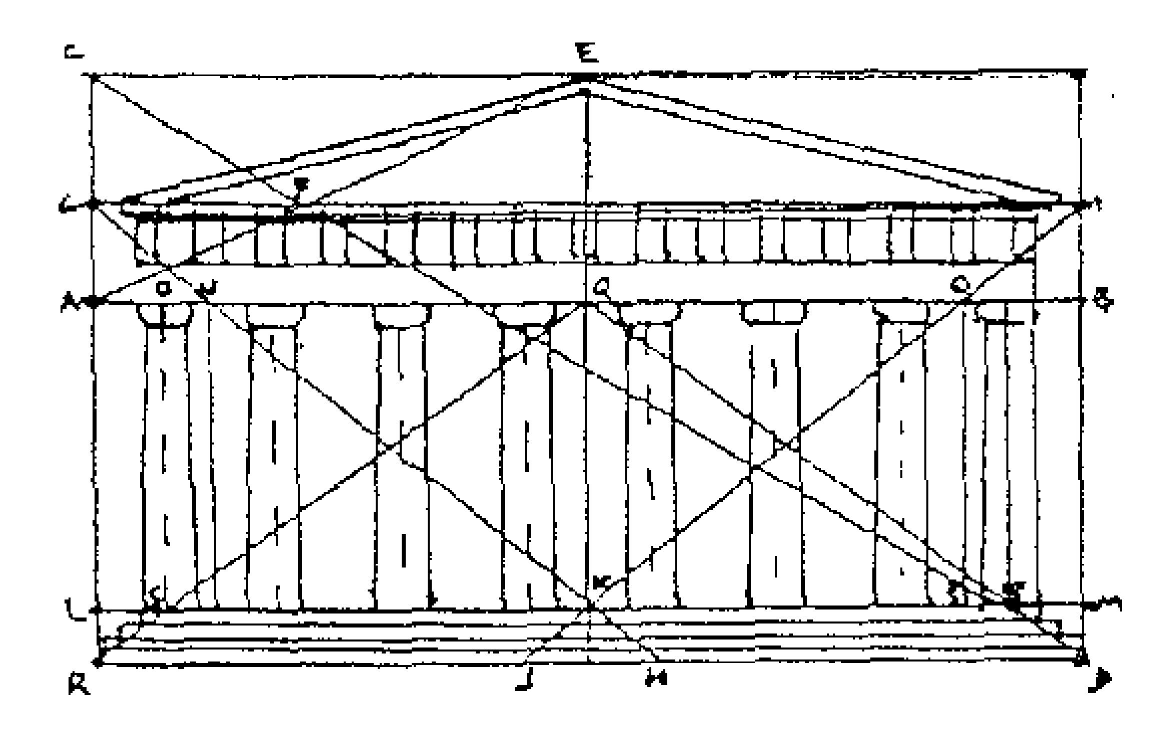
Le rapport entre la longueur et la largeur du rectangle initial est le même que celui du rectangle jaune obtenu en enlevant le carré bleu.

Si on note x ce rapport on a $x = \frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$ on trouve alors

$$x > 0 \; et \;\; x - 1 = \frac{1}{x}$$

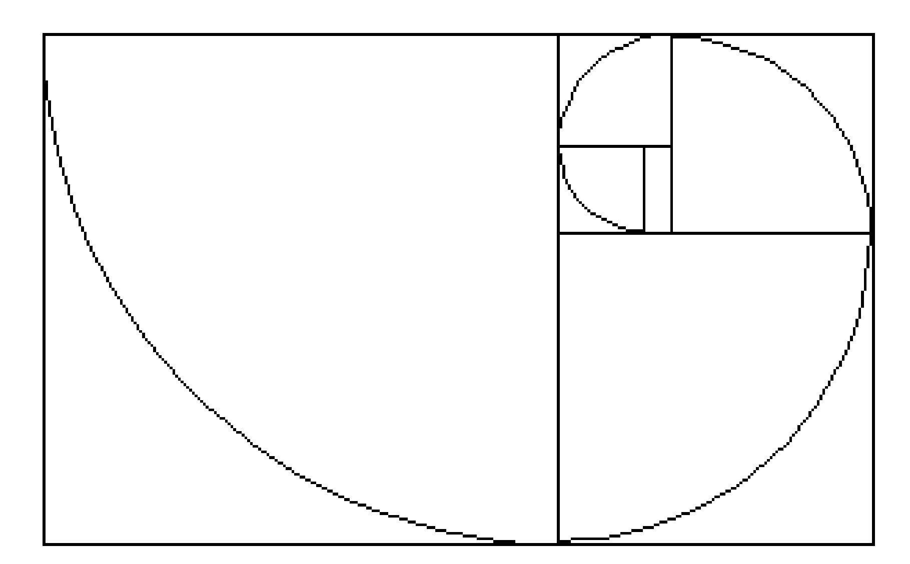
et donc $x^2 - x - 1 = 0$ soit $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ c'est le nombre d'or !

Exemple d'utilisation architecturale du rectangle d'or : le Parthénon à Athènes.

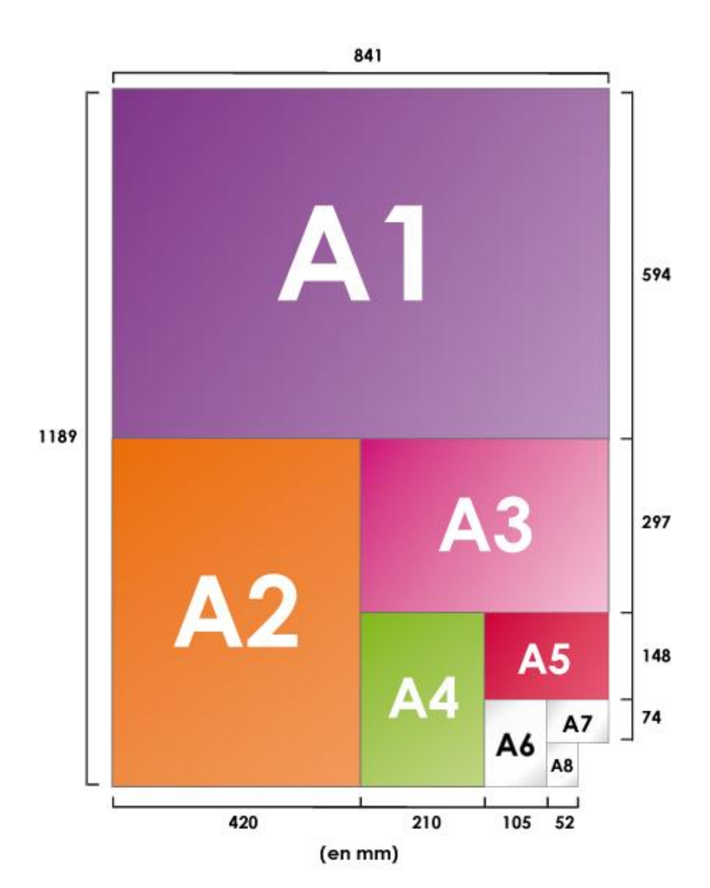


Tout rectangle d'or peut se décomposer en un carré et un rectangle d'or qui lui aussi peut se décomposer en un carré et un rectangle d'or. On peut renouveler cette construction autant de fois qu'on le veut. Un rectangle d'or peut donc être

décomposé en une infinité de carrés tous différents Dans ce tourbillon de carrés il est possible d'inscrire une spirale.



Format A



En pliant un rectangle en 2, on obtient 2 autres rectangles.
Le rapport entre la longueur et la largeur est chaque fois le même.

On a donc a $x = \frac{L}{l} = \frac{l}{L/2}$ soit $x > 0$ et $x = \frac{2}{x}$ et donc $x = \sqrt{2}$

A_0 format initial a été choisi de telle sorte que son aire soit de $1m^2$ (0,841x1,189≈1)
A_1 d'aire ½ m^2
A_2 d'aire ¼ m^2
A_3 d'aire $\frac{1}{8}$ m^2
A_4 d'aire $\frac{1}{16}m^2$ et de dimension 21cm par 29,7cm : $\frac{29,7}{21}$ ≈1,414 et 0,21x0,297≈ $\frac{1}{16}$

Les équations diophantiennes :
Il s'agit de trouver les éventuelles solutions **entières** d'équations polynomiales à coefficients **entiers.**
C'est un des problèmes de Hilbert.
Le grand théorème de Fermat qui est un sous problème du problème général de Hilbert a été résolu par Andrew Wiles en 1995 après 8 ans de travail.
Grand théorème de Fermat :
« Il n'existe pas de nombres entiers non nuls x, y et z tels que :
$x^n + y^n = z^n$, dès que n est un entier strictement supérieur à 2. »

Retour au sommaire

Les nombres complexes

On a vu comment Bombelli a introduit le nombre i et les règles de multiplication lors de la résolution d'équations du troisième degré.
Il trouve par exemple $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 4$, comme solution de l'équation $x^3 = 15x + 4$

Peu de temps avant lui, en 1545, Cardan utilisait des expressions avec une racine carrée de nombre négatif :
De la résolution de l'équation
$x(10 - x) = 40$
il donne les solutions sous la forme suivante :
5. p. . m. 15 et 5. m. . m. 15
que l'on peut lire comme
$5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$

Les mathématiciens ont des réticences à utiliser ces nombres et il faut attendre le XVIII[e] siècle avec Euler qui utilise l'exponentielle complexe et qui démontre en 1748 la célèbre formule $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = e^{\mathrm{i}\theta}$.

Ensuite Gauss, en 1831, utilise l'écriture $a + bi$ pour un nombre complexe.
Ce même Gauss ainsi que Wessel et Argand font le lien entre les vecteurs du plan et nombres complexes.
Hamilton en 1833 définit un nombre complexe comme un couple de réels avec une multiplication bien précise.
Cauchy en 1847 donne une autre interprétation des nombres complexes et développe l'analyse complexe.
A la fin du XIX[e] siècle les physiciens utilisent les nombres complexes comme en optique avec Fresnel ou en électricité (Kennelly)

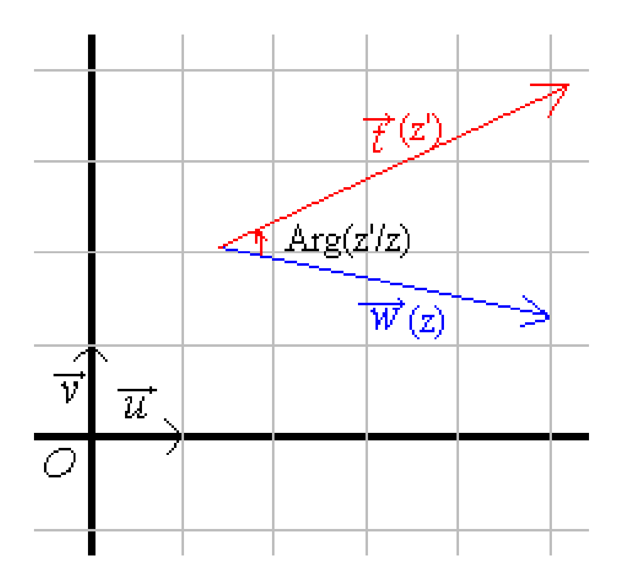
Prolongements :

Analyse complexe

De la même manière que l'on étudie les fonctions à variable réelle et à valeurs réelles (analyse réelle), on étudie les fonctions à variable complexe et à valeurs complexes (analyse complexe).
Il y a la notion de dérivation avec une limite comme en analyse réelle et la notion d'intégration selon un chemin.
Même si beaucoup de résultats sont communs, tout n'est pas similaire.
Par exemple une fonction dérivable (holomorphe) est indéfiniment dérivable.
Ce n'est pas le cas en analyse réelle.
L'intégration permet d'énoncer le théorème des résidus qui utilise les singularités d'une fonction.

Autres nombres

On sait que l'on peut identifier le plan orienté et muni d'un repère orthonormé à $\mathbb{C}$, ainsi un point ou un vecteur peut être remplacé par un nombre complexe.
Faire de la géométrie plane revient à faire des calculs sur ces nombres.
Par exemple des mesures d'angles orientés se calculent à partir de quotient de nombres complexes :



Les similitudes planes et en particulier les isométries se traduisent par une écriture complexe.

Et pour l'espace, peut-on trouver un ensemble de nombres qui permettrait de faire la même chose ?
Non, ce n'est pas possible car l'espace est de dimension 3!

Par contre on peut définir un ensemble de nombres qui contient $\mathbb{C}$ en lui ajoutant 2 autres nombres j et k comme on l'a fait pour trouver les nombres complexes en rajoutant i à $\mathbb{R}$.
Il faut définir la table de multiplication avec ces nouveaux nombres comme Bombelli l'a fait avec i.

x	**1**	***i***	***j***	***k***
1	1	*i*	*j*	*k*
i	*i*	−1	*k*	−*j*
j	*j*	−*k*	−1	*i*
k	*k*	*j*	−*i*	−1

On obtient l'ensemble des quaternions introduit par Hamilton



Plaque commémorative de la naissance des quaternions sur le pont de Broom (Dublin).

« Ici, le 16 octobre 1843, alors qu'il se promenait, Sir William Rowan Hamilton découvrit dans un éclair de génie la formule fondamentale sur la multiplication des quaternions

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

et la grava sur une pierre du pont. »

Euler puis Gauss avaient déjà introduit ces nombres et Hamilton a utilisé leurs travaux.

Un quaternion s'écrit sous la forme $q = a + bi + cj + dk$ où a, b, c et d sont des réels.

Comme $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ et ensemble est un corps mais non commutatif.
S'il n'y a pas de lien direct entre un vecteur et un quaternion, il y a cependant un lien entre les quaternions et les rotations de l'espace.

La dimension de $\mathbb{R}$ est 1, celle de $\mathbb{C}$ est 2 et celle des quaternions est 4.
Il y a aussi un autre ensemble de nombres de dimension 8 qui contient les quaternions : c'est le corps des octonions qui n'est ni associatif ni commutatif.

Retour au sommaire

Quelques fonctions

Les fonctions circulaires, sinus et cosinus, interviennent dans les problèmes d'arpentage, de topographie et bien sûr d'astronomie.

C’est à partir des relations métriques dans un triangle qu’il est possible de calculer, à partir d’angles, des distances entre 2 objets inaccessibles, comme par exemple des planètes (méthodes de triangulation).

Le degré a pour origine l’observation des constellations du zodiaque :
Certains astronomes babyloniens ont remarqué que le Soleil , la Lune , Mercure , Mars , Vénus , Jupiter et Saturne (planètes visibles à l’œil nu) , se déplacent dans la zone étroite du ciel appelé zodiaque .
Au VIIe siècle avant JC, ils représentèrent le zodiaque sous la forme d’une bande circulaire.
Chaque mois, le Soleil cache une constellation différente ; d’où l’idée de partager le cercle et l’année en douze.
Ils avaient constaté qu’il y avait environ 30 jours dans le mois donc environ 360 jours par an. Le tour complet représenta donc 360°. (ils auraient divisé le cercle en autant de parties que l'année comptait de jours, 12 mois de 30 jours, soit 360)

Les origines de la trigonométrie remontent aux civilisations d'Égypte antique, de Mésopotamie et de la vallée de l'Indus, il y a plus de 4000 ans. Une tablette montre, par exemple, quinze triplets pythagoriciens.

Lagadha (-1350 ; -1200) est le premier mathématicien à utiliser la géométrie et la trigonométrie pour l'astronomie. La plupart de ses travaux sont détruits aujourd'hui.

La première utilisation de sinus apparaît dans les sulba Sutras en Inde, entre 800 et 500 avant J.C., où le sinus de $\pi/4$ (45°) est correctement calculé comme $1/\sqrt{2}$ dans un problème de construction d'un cercle de même aire qu'un carré donné (le contraire de la quadrature du cercle).

Le mathématicien grec Hipparque de Nicée (-190 ; -120) construisit les premières tables trigonométriques sous la forme de tables de cordes : elles faisaient correspondre à chaque valeur de l'angle au centre, la longueur de la corde interceptée dans le cercle, pour un rayon fixe donné. Ce calcul correspond au double du sinus de l'angle moitié, et donne donc, d'une certaine façon, ce que nous appelons aujourd'hui une table de sinus. Toutefois, les tables d'Hipparque n'étant pas parvenues jusqu'à nous, elles ne nous sont connues que par le mathématicien égyptien Ptolémée, qui les publia, dans les années 100, avec leur mode de construction dans son Almageste. C'est ainsi qu'elles furent redécouvertes à la fin du Moyen-Âge par Georg von Purbach et son élève Regiomontanus.

Le mathématicien indien Aryabhata, en 499, donne une table des sinus et des cosinus d’angles compris entre 0° et 90° à intervalles de 3,75°, avec une

précision de quatre décimales Il utilise jya (demi-corde) qui après une erreur de traduction deviendra sinus en latin.

Un autre mathématicien indien, Brahmagupta, utilise en 628 l'interpolation numérique pour calculer la valeur des sinus jusqu'au second ordre.

Omar Khayyam (1048-1131) combine l'utilisation de la trigonométrie et la théorie de l'approximation pour fournir des méthodes de résolutions d'équations algébriques par la géométrie.

Des méthodes détaillées de constructions de tables de sinus et cosinus pour tous les angles sont écrites par le mathématicien Bhaskara en 1150. Il développe aussi la trigonométrie sphérique.

Au XIIIe siècle, Nasir al-Din Tusi, à la suite de Bhaskara, est probablement un des premiers à considérer la trigonométrie comme une discipline distincte des mathématiques.

Enfin, au XIVe siècle, Al-Kashi réalise des tables de fonctions trigonométriques lors de ses études en astronomie. Le mathématicien silésien Bartholomäus Pitiscus publie un travail remarquable sur la trigonométrie en 1595, dont le titre (Trigonometria) a donné son nom à la discipline.

Retour au sommaire

Dans le cadre des fonctions trigonométriques et des problèmes de triangulation il est difficile de ne pas parler du mètre.
Le mètre est défini, après les travaux d’une commission dont faisaient partie Lagrange, Laplace et Monge, le 26 mars 1791 par l'Académie française des sciences, comme étant la dix-millionième partie de la moitié de méridien terrestre (ou d'un quart de grand cercle passant par les pôles), ou encore le dix-millionième de la distance pour aller pour aller d’un pôle à un point donné de l’équateur.

La révolution française est à l’origine de profonds changements :
La déclaration des droits de l’homme qui commence par *«Tous les Hommes naissent et demeurent libres et égaux en droits...»*
L’abolition des privilèges
La nationalisation des biens du clergé
L’unification des poids et mesures avec la création du mètre
La création des départements
L’instauration de l’état civil
L’introduction du mariage civil et du divorce

etc…

Mais revenons au mètre.

Il fut décidé d’une expédition pour mesurer cette distance qui définit le mètre. D’abord furent nommés Legendre, Cassini et Méchain (un mathématicien et deux astronomes) mais ensuite Delambre, astronome lui aussi, remplaça les 2 premiers.

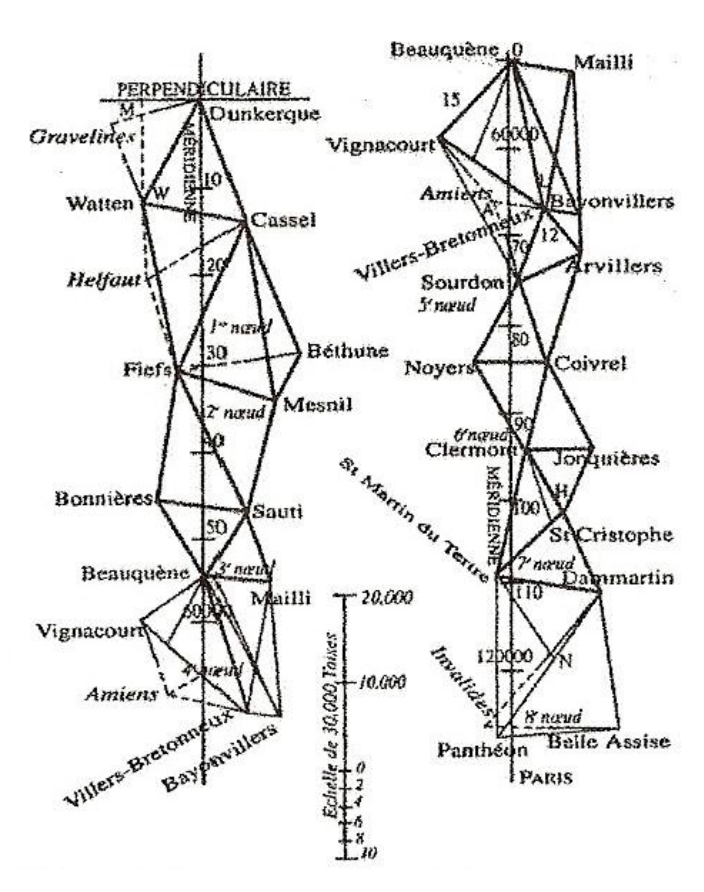
Cette expédition ne s’est pas faite sans problème :

L’expédition se prolongera dans des conditions difficiles de 1792 à 1798. Il faut monter le matériel au haut des clochers, franchir des montagnes, braver le froid puis les fortes chaleurs, la méfiance des habitants et surtout une situation politique des plus agitées.

Le résultat des mesures de *Delambre* et *Méchain* est étonnant : 551 584,7 toises, avec une erreur remarquable de seulement 8 millionièmes !

La longueur du quart de méridien calculée est alors égale à 5 130 740 toises.

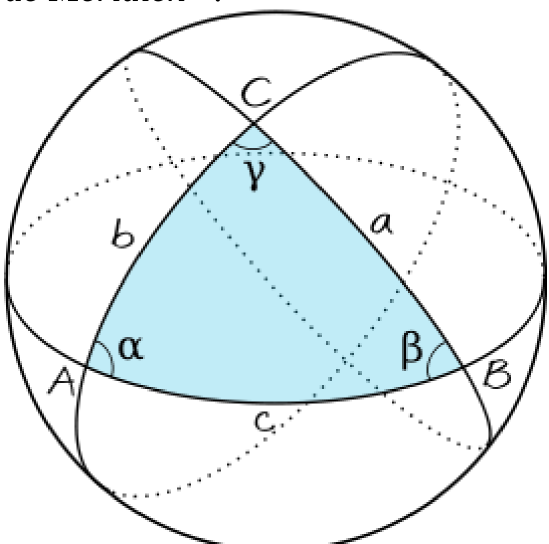
Voici un exemple d’utilisation de la méthode de triangulation



Seulement, la terre est sphérique et les calculs devaient en tenir compte : il s’agit de la géodésie.

Les travaux théoriques sur la question, géométrie sphérique, fonctions sphériques etc… sont dus aux mathématiciens Euler, Monge, Laplace, Legendre, Clairaut et c’est Delambre qui en fait une synthèse dans son ouvrage : « *Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du Méridien à*

Paris » où il expose la *« Méthode pour déterminer la longueur exacte du quart de Méridien ».*



On note par exemple a l'angle BOC où O est le centre de la sphère.
On a alors plusieurs relations :
$\cos\gamma = -\cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta\ \cos c$.
ou encore
$d_{AB} = Rc = R\,\mathrm{arccos}\,(\sin\phi_A \sin\phi_B + \cos\phi_A \cos\phi_B \cos\Delta\lambda)$
où

= 6 400 km est le rayon terrestre

C est le pôle nord, *a* est le complémentaire de la latitude $\phi_A$de *A*, *b* le complémentaire de celle $\phi_B$de *B*, et γla différence de longitude $\Delta\lambda{=}\lambda_B{-}\lambda_A$.

Retour au sommaire

La fonction logarithme (ln) est introduite pour faciliter les calculs de produits et de quotients en astronomie.
Avant elle, les formules suivantes, combinées aux tables trigonométriques étaient utilisées :

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a{-}b){-}\cos(a{+}b)] \quad \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a{-}b){+}\cos(a{+}b)].$$

Pour calculer le produit AB, on trouvait a et b par les tables tels que A=sin(a) et B=sin(b), puis on calculait cos(a-b) et cos(a+b) toujours par les tables, et il suffisait de faire la soustraction et de diviser par 2.

Cette idée de remplacer un produit en une somme ou une différence par l'intermédiaire de tables est à l'origine de la fonction ln.
Nous savons que justement ln(xy)=ln(x)+ln(y) et qu'en général $\log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y)$
où $\log_a$ est le logarithme de base a (a>0) et est défini par $\log_a(x)=\ln(x)/\ln(a)$.

Donc, à partir de tables logarithmiques on peut calculer un produit comme nous venons de le faire avec les tables trigonométriques.
Sauf que c'est bien plus pratique avec ces dernières, car il n'y a pas de manipulation d'angles dont l'écriture n'est pas décimale mais sexagésimale.

Pour construire de telles tables, Neper ou Napier (1550-1617) fait le lien entre suites géométrique et arithmétique (pour rappel $q^{a+b} = q^a q^b$), d'ailleurs le terme logarithme qu'il utilise signifie arithmos = nombre, logos = raison, rapport).
Il imagine 2 mouvements, l'un à vitesse constante (y) et l'autre à vitesse proportionnelle à GS (x):

T G x(t) S

B y(t) C

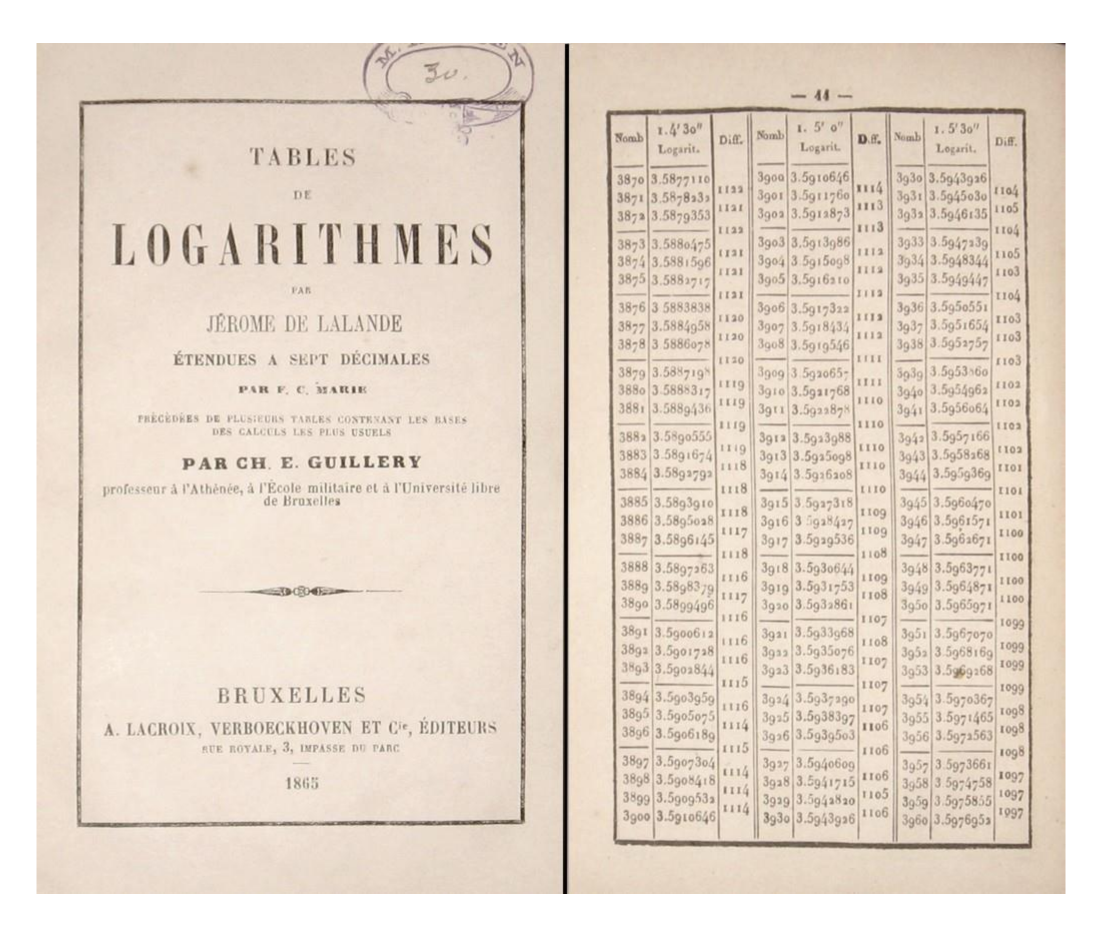
et il prend TS=10^7 : Nous avons alors la relation

$$\frac{y}{10^7} = -\ln\left(\frac{x}{10^7}\right).$$

et y=0 pour x=10^7.
Pour simplifier l'utilisation des tables, il décide, avec Briggs en 1616, de prendre 0 pour le logarithme de 1 et 10^{14} pour celui de10, soit

$$y = 10^{14}\log_{10}(x)$$

Les tables que publie Briggs ont un rapide succès dès 1620.



TABLES
DE
LOGARITHMES
PAR
JÉROME DE LALANDE
ÉTENDUES A SEPT DÉCIMALES
PAR F. C. MARIE
PRÉCÉDÉES DE PLUSIEURS TABLES CONTENANT LES BASES DES CALCULS LES PLUS USUELS
PAR CH. E. GUILLERY
professeur à l'Athénée, à l'École militaire et à l'Université libre de Bruxelles

BRUXELLES
A. LACROIX, VERBOECKHOVEN ET Cie, ÉDITEURS
RUE ROYALE, 3, IMPASSE DU PARC
1865

— 44 —

Nomb	1. 4' 30" Logarit.	Diff.	Nomb	1. 5' 0" Logarit.	Diff.	Nomb	1. 5' 30" Logarit.	Diff.
3870	3.5877110	1122	3900	3.5910646	1114	3930	3.5943926	1104
3871	3.5878232	1121	3901	3.5911760	1113	3931	3.5945030	1105
3872	3.5879353	1122	3902	3.5912873	1113	3932	3.5946135	1104
3873	3.5880475	1121	3903	3.5913986	1112	3933	3.5947239	1105
3874	3.5881596	1121	3904	3.5915098	1112	3934	3.5948344	1103
3875	3.5882717	1121	3905	3.5916210	1112	3935	3.5949447	1104
3876	3.5883838	1120	3906	3.5917322	1112	3936	3.5950551	1103
3877	3.5884958	1120	3907	3.5918434	1112	3937	3.5951654	1103
3878	3.5886078	1120	3908	3.5919546	1111	3938	3.5952757	1103
3879	3.5887198	1119	3909	3.5920657	1111	3939	3.5953860	1102
3880	3.5888317	1119	3910	3.5921768	1110	3940	3.5954962	1102
3881	3.5889436	1119	3911	3.5922878	1110	3941	3.5956064	1102
3882	3.5890555	1119	3912	3.5923988	1110	3942	3.5957166	1102
3883	3.5891674	1118	3913	3.5925098	1110	3943	3.5958268	1101
3884	3.5892792	1118	3914	3.5926208	1110	3944	3.5959369	1101
3885	3.5893910	1118	3915	3.5927318	1109	3945	3.5960470	1101
3886	3.5895028	1117	3916	3.5928427	1109	3946	3.5961571	1100
3887	3.5896145	1118	3917	3.5929536	1108	3947	3.5962671	1100
3888	3.5897263	1116	3918	3.5930644	1109	3948	3.5963771	1100
3889	3.5898379	1117	3919	3.5931753	1108	3949	3.5964871	1100
3890	3.5899496	1116	3920	3.5932861	1107	3950	3.5965971	1099
3891	3.5900612	1116	3921	3.5933968	1108	3951	3.5967070	1099
3892	3.5901728	1116	3922	3.5935076	1107	3952	3.5968169	1099
3893	3.5902844	1115	3923	3.5936183	1107	3953	3.5969268	1099
3894	3.5903959	1116	3924	3.5937290	1107	3954	3.5970367	1098
3895	3.5905075	1114	3925	3.5938397	1106	3955	3.5971465	1098
3896	3.5906189	1115	3926	3.5939503	1106	3956	3.5972563	1098
3897	3.5907304	1114	3927	3.5940609	1106	3957	3.5973661	1097
3898	3.5908418	1114	3928	3.5941715	1105	3958	3.5974758	1097
3899	3.5909532	1114	3929	3.5942820	1106	3959	3.5975855	1997
3900	3.5910646		3930	3.5943926		3960	3.5976952	

Les tables de logarithmes ont été utilisées jusqu'au XXe siècle avant les calculatrices !

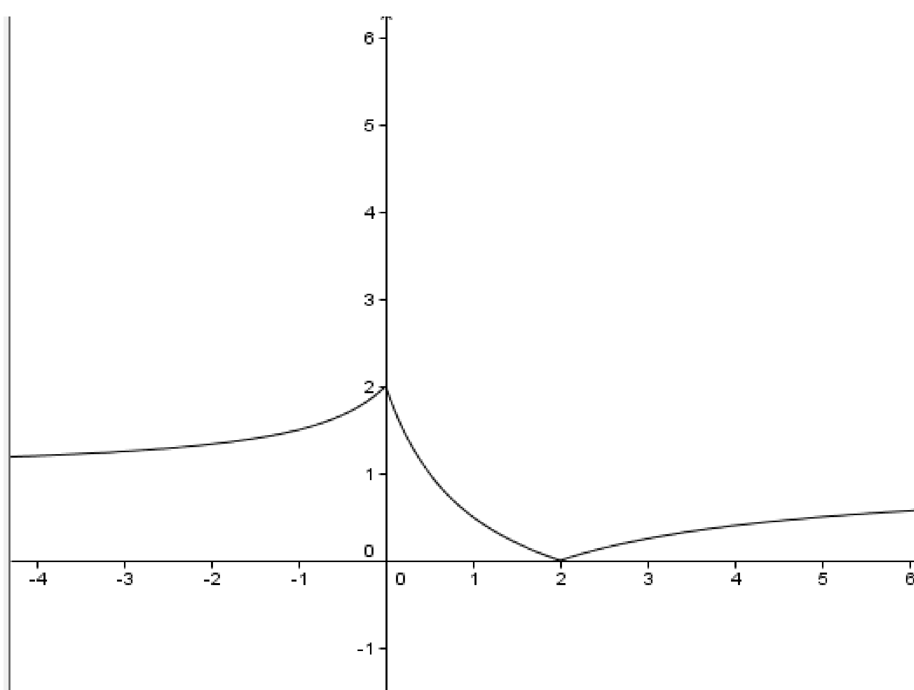
Les fonctions exponentielles seront introduites peu à peu et c'est seulement en 1697 par Bernoulli qu'elles auront un statut à part entière.
Il y a eu d'abord l'utilisation d'exposant fractionnaire par Newton (2 lettres envoyées à Leibniz en 1676), ensuite vers 1690, Leibniz présente des exposants variables et fait le lien avec la fonction logarithme.
A cette occasion, il introduit un nombre, qu'il note b et qui sera noté e par Euler plus tard en 1728, dont le logarithme naturel vaut 1.
Euler appelle ce nombre e le nombre de Neper en l'honneur de Neper et le logarithme naturel devient le logarithme népérien (de base e).
Euler étudie les propriétés de ce nombre mais c'est seulement en 1874 que l'Hermite démontre sa transcendance.

Retour au sommaire

Dérivabilité et continuité
Pour un élève de lycée, une fonction est intimement liée à sa représentation graphique.
Il lui est donc difficile d'imaginer des fonctions ayant des propriétés qui ne peuvent pas se représenter par un simple dessin.
Par exemple une fonction continue « partout » sur $\mathbb{R}$ mais dérivable « nulle part » sur $\mathbb{R}$, ou encore une fonction dérivable mais dont la dérivée présente des discontinuités.
Dans le premier cas, avec par exemple la fonction $|x|$, on peut construire des fonctions continues mais non dérivables en un ou plusieurs points.
En ces points « anguleux », il y a une tangente à gauche différente de celle à droite.
Voilà un exemple illustré par « géogébra » :

Fonction

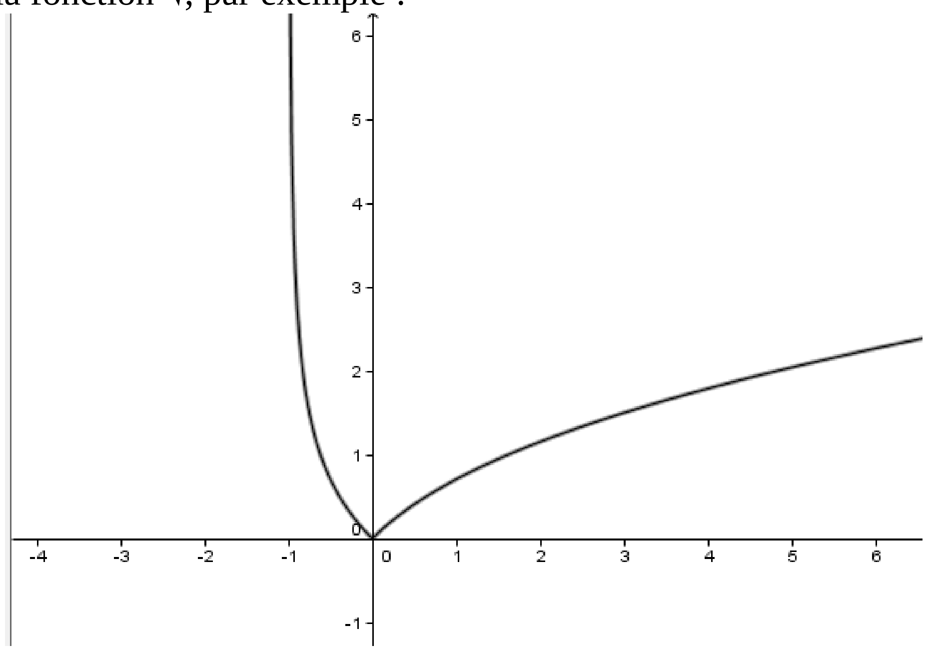
$f(x) = \frac{|x-2|}{|x|+1}$



On peut aussi utiliser la fonction √, par exemple :

Fonction

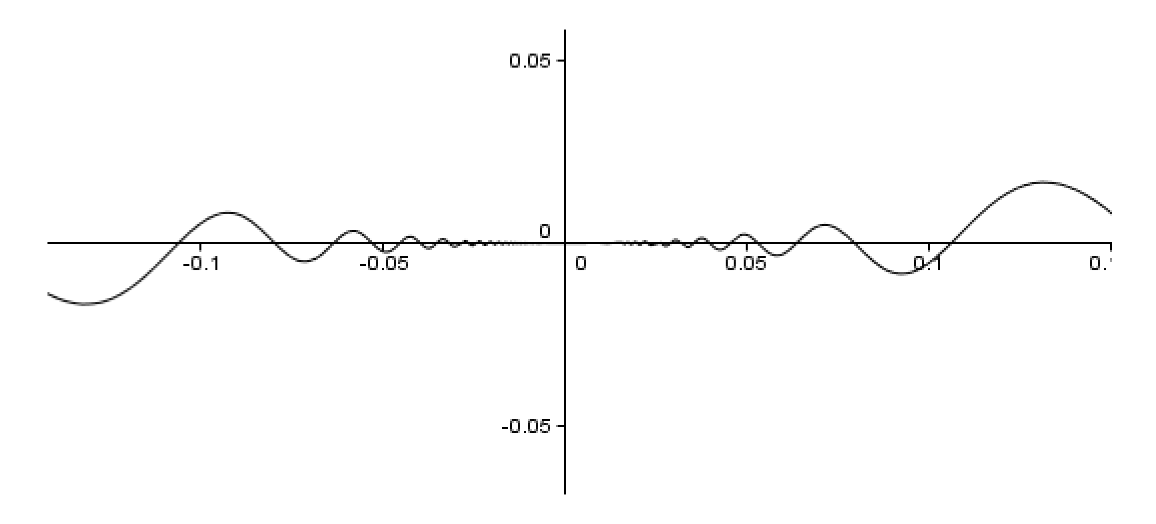
$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x+1}}$



Dans le second cas, on peut définir une fonction en 2 temps, par exemple :

$$\begin{cases} \Phi(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) pour\ x \neq 0 \\ \Phi(0) = 0 \end{cases}$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée n'est pas continue en 0.
Toujours avec géogébra :



Alors qu'en est-il plus précisément ?

En 1875, ***Gaston Darboux*** propose une fonction F dérivable sur ℝ, mais dont la dérivée n'est continue sur aucun intervalle.

$$F : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \phi(\sin(nx\pi))$$

où Φ est la fonction définie plus haut et la série $\sum a_n$ est absolument convergente.

La dérivée f est alors :

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \pi a_n \phi'(\sin(nx\pi)) \cos(nx\pi)$$

qui est discontinue en tout x rationnel !

Il démontre aussi que toute fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Conséquences :

1) On sait que toute fonction continue vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Darboux démontre donc que la réciproque est fausse :

Par exemple la fonction f, qui est une dérivée, vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et est discontinue en tout rationnel.

2) On sait aussi que toute fonction continue admet des primitives sur un intervalle.

La même fonction f est discontinue sur tout intervalle de ℝ et pourtant elle admet une primitive Φ sur ℝ.

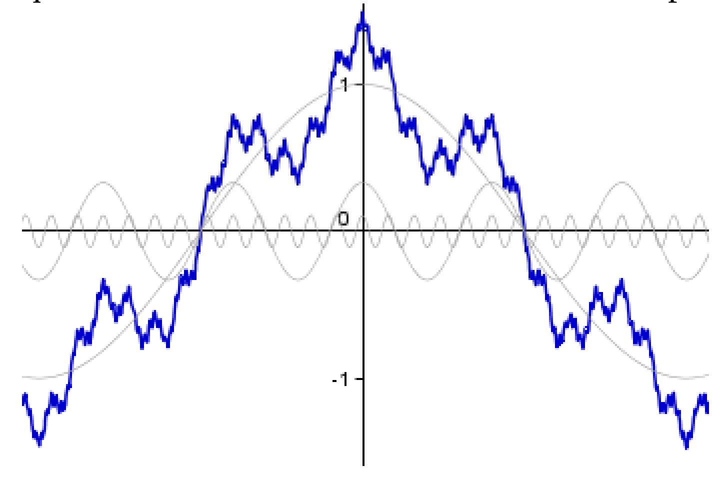
Karl Weierstrass (1815-1897) propose une fonction (qui porte son nom) continue partout et dérivable nulle part :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cos(12^n \pi x)$$

ou encore

$$W(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

Pour $0 < a < 1$ et b impair donnés tels que $ab>1$
Prenons par exemple $a=1/3$ et $b=5$. On a alors :
$W(x) = \cos(\pi x) + \cos(5\pi x)/3 + \cos(25\pi x)/9 + ...$
Autrement dit, une somme de fonctions cosinus (toutes aussi continues et dérivables les unes que les autres, mais de plus en plus sinueuses et tassées), ce qui donne avec seulement la somme des 3 premiers termes:



On peut remarquer que les deux mathématiciens utilisent des séries de fonctions continues.
Il y a 3 notions de convergence de suite (ici de série) de fonctions (simple, uniforme et normale) avec les implications suivantes :
normale ⇒ uniforme ⇒ simple

De plus la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.
Par contre la limite uniforme d'une suite de fonctions dérivables peut ne pas être dérivable.
La convergence normale des séries proposées implique leur convergence uniforme qui a pour conséquence que la limite est une fonction continue.
Les coefficients sont alors choisis de telle sorte que, dans un cas, la fonction limite soit dérivable mais avec une dérivée non continue, et dans le second cas, la fonction limite ne soit pas dérivable.
Et bien sûr, de telles fonctions ne se tracent pas.

Retour au sommaire

Les vecteurs et le produit scalaire

Euler et Gauss travaille sur les nombres complexes qui sont liés à la géométrie plane et Gauss cherche un lien identique avec l'espace à 3 dimensions.

Mais il bute sur la multiplication, en particulier sur la conservation des normes.
C’est Frobenius qui démontre en 1877 qu’une telle multiplication est impossible à définir avec 3 coordonnées.
Hamilton a l’idée d’introduire une 4ième coordonnée.
Selon ses dires, il marchait, le 16 octobre 1843, le long du canal royal, avec son épouse quand soudain lui vint à l'esprit la solution sous la forme des relations :
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
Il grava alors promptement ces relations avec un couteau dans une pierre du pont de Brougham (maintenant appelé Broom Bridge) à Dublin. Cette inscription, malheureusement effacée par le temps, a été remplacée par une plaque à la mémoire de Sir William Rowan Hamilton.

Les nombres quaternions naissent et Hamilton décompose un quaternion en 2 parties, l’une scalaire et l’autre vectorielle.
C’est l’origine du produit scalaire et des vecteurs et donc l’étude des quaternions permet l’émergence du calcul vectoriel.
Grassmann, en 1839 publie une thèse qui ne sera publiée qu’en 1911. Il définit un calcul vectoriel plus complet que celui de Hamilton et plus proche du notre.
En 1881, Gibbs publie *Elements of Vector Analysis Arranged for the Use of Students of Physics* s'inspirant des travaux déjà réalisés notamment ceux de Clifford et Maxwell. Si les physiciens se sont empressés d'utiliser le formalisme de Gibbs, celui-ci ne fut accepté en mathématiques que bien plus tard, et après plusieurs modifications.
La notation $\overrightarrow{AB}$ est due à Hamilton, le point pour le produit scalaire et le $\wedge$ pour le produit vectoriel par Gibbs.

Prolongements *:*
Les vecteurs sont des éléments d’espaces vectoriels bien plus généraux ayant 2 opérations, l’une interne et l’autre externe ayant de bonnes propriétés (comme l’addition et la multiplication par un scalaire pour les vecteurs vus au lycée).
Une fonction, une suite, par exemple deviennent des vecteurs.
Le produit scalaire du plan est un cas particulier de forme bilinéaire symétrique strictement positive.
Il y a des définitions plus générales selon que l’on se trouve en dimension finie (formes quadratiques et groupes classiques) ou quelconque (topologie).
Dans ce cadre, on peut définir, par exemple, le produit scalaire de 2 fonctions par une intégrale ou de 2 suites par une série.
C’est en licence que j’ai étudié la théorie des formes quadratiques avec le professeur Deheuvels et la topologie avec le professeur Dixmier.
Quels cours et un grand merci messieurs!

Sur les vecteurs, d’autres produits existent : produits vectoriel et mixte avec les vecteurs de l’espace, produits tensoriels et extérieur sur des espaces vectoriels.

La géométrie vectorielle est très utilisée en physique.

Retour au sommaire

Les probabilités :

Le calcul des probabilités prend véritablement naissance au XVIIème siècle à partir de questions sur les jeux, par exemple comment répartir les gains entre les joueurs lorsqu'une partie est interrompue.
Imaginons 2 joueurs, qui misent 32 pistoles chacun. Ils jouent à pile ou face : l'un gagne si c'est face et l'autre gagne si c'est pile.
Le premier qui gagne 3 fois reçoit toute la mise soit 64 pistoles.
Le jeu, pour une raison quelconque, s'est interrompu, par exemple après une partie jouée et donc gagnée par l'un des 2 joueurs.
Comment répartir les 64 pistoles entre les 2 joueurs ?
C'est un des problèmes proposés par le Chevalier de Méré.

Blaise Pascal propose une solution en utilisant ce que l'on appelle l'espérance de gain.
Pour cela il construit un arbre pondéré illustrant toutes les possibilités et il calcule l'espérance mathématique du gain (44 pistoles pour celui qui a déjà gagné une partie).
C'est un bon exercice de terminale S ou ES.
Pascal utilise donc cette notion d'espérance ainsi que la formule de probabilités dans le cas où la loi est la loi équirépartie (rapport du nombre de cas favorables à un joueur sur le total des cas possibles dans la partie).

Commence alors une correspondance avec Fermat, dans laquelle est élaborée une théorie des probabilités sans pour autant que l'un ou l'autre n'ait publié quoique ce soit à ce sujet.
Voici un exemple de la correspondance avec Fermat :
"Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a misé 32 pistoles au jeu : Posons que le premier en ait deux et l'autre une; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles; si l'autre la gagne, ils ont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles.
Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : `Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai,

peut-être vous les aurez; le hasard est égal; partageons donc les 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres. Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16."

Le premier traité de probabilités est publié par Christian Huygens : *" De ratocinii in ludo aleae"* ou autrement dit: "la théorie du jeu de dés".

Au XVIIIème siècle, les probabilités prennent un essor important avec les mathématiciens De Moivre, Bayes, Bernoulli, Leibnitz, Laplace.
Bernoulli énonce et démontre la loi faible des grands nombres appliquée aux lancers d'une pièce.
De même, c'est à ce moment que s'élabore une théorie complète sur les permutations et les combinaisons utile pour des problèmes de dénombrement.
Laplace donne en 1795 une définition de la probabilité d'un événement comme Pascal l'avait déjà utilisée.
D'ailleurs Laplace l'attribue à Pascal.
"La probabilité est une fraction, dont le numérateur est le nombre de cas favorables, et dont et le dénominateur est le nombre de cas possibles."
Laplace travaille sur les lois de probabilités continues et établie la formule
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}$
qui est liée à la loi normale centrée réduite.
Abraham De Moivre dans un traité en 1718 établit la formule de Stirling, puis avec cette formule démontre le théorème de Moivre Laplace qui donne une approximation de la loi binomiale par une loi normale (c'est un cas particulier du théorème central limite).
Il définit aussi les probabilités conditionnelles.
Thomas Bayes établit une formule sur les probabilités conditionnelles qui porte son nom.

Au début du XIXème siècle, Laplace publie son traité intitulé *Théorie analytique des probabilités* dans lequel des lois continues sont utilisées.
Il démontre le théorème central limite.
Ce dernier met en relief le rôle essentiel de la loi normale.
La loi normale est aussi appelée loi gaussienne ou de Gauss ou encore de Laplace-Gauss car Gauss et Laplace l'ont étudiée.

Prolongements :

Echantillonnage :
Dans les programmes de premières et de terminales il est question d'échantillonnage.
Les probabilités et les statistiques sont ainsi liées.

En effet, supposons une proportion, d'un caractère donné dans une population donnée, est connue, disons p.
L'expérience aléatoire qui consiste à prélever n individus dans cette population peut être assimilée à la loi binomiale de paramètres n et p.
La fréquence Fn d'individus ayant ce caractère étudié est donc une variable aléatoire dont on connaît la loi.
Un intervalle de fluctuation au seuil de 95% est un intervalle centré en p pour lequel la probabilité que Fn soit dedans est supérieure à 95%.
Un intervalle de fluctuation asymptotique de même seuil utilise le théorème de Moivre Laplace qui approxime la loi binomiale par une loi normale.
Il s'agit donc uniquement de probabilités.
Maintenant prélevons effectivement n individus (échantillon de taille n) et calculons la fréquence d'individus ayant ce caractère : c'est la fréquence observée et il s'agit de statistiques.
Si on fait une hypothèse sur la valeur de p, on pourra acceptée ou rejetée cette hypothèse au seuil de 95% si la f est ou n'est pas dans cet intervalle.
Si p est connue, l'échantillon est conforme ou représentatif de la population si f est dans cet intervalle et non conforme sinon.
A partir de l'intervalle de fluctuation, on définit un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95%.
Cet intervalle n'est plus centré en p (proportion sur la population entière) mais en f (proportion sur l'échantillon)
Cet intervalle, qui fluctue selon l'échantillon choisi, donne une fourchette de valeurs entre lesquelles p peut se trouver, avec un niveau de confiance de 95%.
Il permet donc de faire une estimation de p à partir d'un échantillon représentatif de la population et cela au niveau de confiance de 95%.

Kolmogorov en 1933, avec la théorie de la mesure, définit de manière rigoureuse ce qu'est l'indépendance, le conditionnement, l'espérance mathématique, la convergence presque sûre
Il démontre ainsi la loi forte des grands nombres qui utilise une convergence presque sûre (la loi faible des grands nombres fait appel à une convergence en probabilité).

D'autres notions interviennent comme les chaînes de Markov, le mouvement Brownien, les processus stochastiques, les martingales etc…

La théorie du chaos n'a pas réellement de rapport avec les probabilités, puisqu'elle se réfère à un modèle déterministe très instable (très sensible aux données initiales), mais elle propose un regard de ce que peut être le hasard.
Voilà ce qu'en dit Henri Poincaré :

« *Comment oser parler des lois du hasard ? Le hasard n'est-il pas l'antithèse de toute loi ? Ainsi s'exprime Bertrand, au début de son Calcul des probabilités. La*

probabilité est opposée à la certitude ; c'est donc ce qu'on ignore et, par conséquent semble-t-il, ce qu'on ne saurait calculer. Il y a là une contradiction au moins apparente et sur laquelle on a déjà beaucoup écrit.

Et d'abord qu'est-ce que le hasard ? Les anciens distinguaient les phénomènes qui semblaient obéir à des lois harmonieuses, établies une fois pour toutes, et ceux qu'ils attribuaient au hasard ; c'étaient ceux qu'on ne pouvait prévoir parce qu'ils étaient rebelles à toute loi. Dans chaque domaine, les lois précises ne décidaient pas de tout, elles traçaient seulement les limites entre lesquelles il était permis au hasard de se mouvoir. […]

Pour trouver une meilleure définition du hasard, il nous faut examiner quelques-uns des faits qu'on s'accorde à regarder comme fortuits, et auxquels le calcul des probabilités paraît s'appliquer ; nous rechercherons ensuite quels sont leurs caractères communs. Le premier exemple que nous allons choisir est celui de l'équilibre instable ; si un cône repose sur sa pointe, nous savons bien qu'il va tomber, mais nous ne savons pas de quel côté ; il nous semble que le hasard seul va en décider. Si le cône était parfaitement symétrique, si son axe était parfaitement vertical, s'il n'était soumis à aucune autre force que la pesanteur, il ne tomberait pas du tout. Mais le moindre défaut de symétrie va le faire pencher légèrement d'un côté ou de l'autre, et dès qu'il penchera, si peu que ce soit, il tombera tout à fait de ce côté. Si même la symétrie est parfaite, une trépidation très légère, un souffle d'air pourra le faire incliner de quelques secondes d'arc ; ce sera assez pour déterminer sa chute et même le sens de sa chute qui sera celui de l'inclinaison initiale. »

« Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit. »

Le hasard existe-il ?
La théorie des probabilités ne donne pas de réponse à cette question mais essaie seulement de le mesurer.

Retour au sommaire

Les ensembles infinis

C'est au XIX[e] siècle avec Cantor que l'infini devient pluriel.
Dans la théorie des ensembles introduite par Cantor et qui sera formalisée par une théorie axiomatique cohérente ZF (Zermelo et Fraenkel) ou ZFC (qui inclut l'axiome de choix), on construit l'ensemble ℕ qui n'est pas fini (donc infini).
L'ensemble ℝ qui contient ℕ est lui aussi infini.
Mais de quel infini parle-t-on ?
Pour les comparer on utilise la notion d'équipotence entre ensembles : 2 ensembles sont équipotents quand ils peuvent être mis en bijection.
On dit alors qu'ils ont le même cardinal.
Or ℕ et ℝ ne peuvent pas être mis en bijection, donc l'infini de ℝ n'est pas le même que celui de ℕ.
on parle de l'infini continu ou puissance du continu pour un ensemble qui est en bijection avec ℝ (par exemple l'intervalle
$]-\pi/2\ ;\ \pi/2[$ est en bijection avec ℝ par la fonction tangente , donc $]-\pi/2\ ;\ \pi/2[$ et ℝ ont le même cardinal).
On parle de l'infini dénombrable pour un ensemble en bijection avec ℕ (par exemple toute suite est dénombrable)
Ce qui est étrange, c'est qu'un ensemble infini peut être mis en bijection avec une de ces parties propres.
D'ailleurs c'est une façon de définir un ensemble infini :
Un ensemble *E* est infini s'il est équipotent à une de ses parties propres.
On a aussi cette propriété :
Tout ensemble infini contient un ensemble dénombrable.
ℤ, ℚ et l'ensemble des nombres algébriques sont dénombrables, donc peuvent être mis en bijection avec ℕ.
Mais Cantor construit d'autres infinis : de ℝ, il considère l'ensemble des parties de ℝ qui contient ℝ mais qui ne peut pas être mis en bijection avec ℝ.
C'est donc un autre « infini ».
De manière générale il démontre qu'un ensemble ne peut pas être mis en bijection avec l'ensemble de ses parties.
Ce qui a pour conséquence qu'il y a une infinité d'infinités !

Entre ℕ et ℝ y a-t-il d'autres infinis ?
C'est-à-dire un ensemble qui contient ℕ et qui est contenu dans ℝ mais qui ne peut pas être mis en bijection ni avec l'un et ni avec l'autre.

Cantor pensait que oui, c'est l'hypothèse du continu.
Ce problème est l'un des 23 problèmes posés par Hilbert en 1900 à Paris.
Cette hypothèse est en fait indécidable pour la théorie axiomatique des ensembles ZFC.
C'est-à-dire qu'elle ne peut pas être démontrée par les axiomes de cette théorie (Paul Cohen en 1963) pas plus que sa négation (Gödel en 1938)

Avec l'énoncé des parallèles cela fait le deuxième énoncé indécidable au sens de Gödel selon des théories axiomatiques données.

Retour au sommaire

L'indécidabilité

On a vu la notion d'indécidabilité au sens de Gödel ou d'indépendance par rapport à un système d'axiomes.
C'est une notion qui est relative car elle dépend de la théorie.
Si on rajoute à une théorie un énoncé qui est indécidable pour cette théorie alors on obtient une théorie pour laquelle ce même énoncé devient démontrable : la démonstration consistant à faire un simple appel à cet énoncé.

Il existe une notion d'indécidabilité absolue : **l'indécidabilité algorithmique**.
Un problème est dit décidable s'il existe un algorithme, une procédure qui termine en un nombre fini d'étapes, qui le décide, c'est-à-dire qui réponde par oui ou par non à la question posée par le problème.
S'il n'existe pas de tels algorithmes, le problème est dit indécidable.
Un algorithme est équivalent à une machine de Turing (XXe siècle) qui peut être vue comme un ruban avec des cases dans lesquelles les entrées sont écrites avec des 0 et des 1par exemple , et qui parcourt automatiquement ces cases selon des règles bien définies.
Ces règles effectuées automatiquement peuvent être représentées par un graphe où les sommets sont des états et les arêtes les conditions de changement d'état avec les actions à effectuer dans ce cas.
(Il s'agit d'un automate)
On début l'automate est dans un certain état et l'entrée (la donnée) est écrite sur le ruban.
La machine se déplacera d'une case à droite ou à gauche automatiquement en suivant les règles données par le graphe et les valeurs lues dans les cases.
La machine devra s'arrêter après un nombre fini de déplacements.
Voici un site qui donne des exemples concrets.

Cette notion d'automates est étudiée en informatique.
On la retrouve dans le jeu de la vie ou automates cellulaires.

Certains problèmes sont indécidables c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'algorithme donnant une réponse au problème quelle que soit la « valeur » des entrées.
Attention, ce n'est pas la même chose que « l'on ne sait pas faire» :
On **sait** qu'un tel algorithme n'existe pas.
Cela ne veut pas dire non plus que l'on ne sait pas résoudre le problème :
On peut, pour des cas particuliers, le résoudre.

Pour de tels problèmes la machine ne peut pas remplacer l'homme qui aura donc toujours du « travail » en perspective !
Retour au sommaire

Des exemples de tels problèmes indécidables:

1) Soient F1 F2 ... Fn une liste de formes polygonales.
Peut-on paver le plan, sans recouvrement ni espace vide avec des exemplaires de F1 F2 ... Fn ?
Il y a des sous problèmes (formes polygonales particulières, question moins restrictive) qui eux sont décidables

2) Etant donnée une équation diophantienne à coefficients entiers : trouver un procédé qui détermine par un nombre fini d'opérations si cette équation possède des solutions entières.
(On appelle *équation diophantienne* une équation de la forme : P=0, où P est polynôme et dont on ne s'intéresse qu'aux solutions entières)
C'est encore l'un des 23 problèmes d'Hilbert (le 10[ième]) résolu en 1970 par Matijasevic avec une réponse négative (il n'existe pas d'algorithme qui pour une équation quelconque répond par oui ou non à la question : l'équation a-t-elle des solutions entières ?)

Des sous problèmes sont décidables :
Soit P un polynôme à coefficients entiers de degré < 3.
L'équation P=0 possède-t-elle des solutions?

Le grand théorème de Fermat ou les équations de Bézout sont des sous problèmes pour lesquels une réponse a été donnée.

Pour d'autres sous problèmes, on ne sait pas encore !

3) Le problème de l'arrêt consiste, étant donné un programme informatique quelconque (au sens machine de Turing), à déterminer s'il finira par s'arrêter ou non.
Dans le cas d'un automate cellulaire, on ne sait pas à l'avance, quelle que soit la configuration initiale de cellules, s'il restera des cellules vivantes à long terme.

L'indécidabilité du problème de l'arrêt prend alors un sens nouveau concernant la prédictibilité en physique :
Même si on connait parfaitement un système physique et toutes les lois qui le régissent, même si de plus ce système ne répond qu'à des lois déterministes, il se peut quand même que son comportement à long terme ne soit pas prédictible. Même dans un univers simplifié, non quantique, qu'on connaîtrait parfaitement, l'avenir continuerait de nous échapper.

4) Une formule arithmétique étant donnée, peut-on la démontrer dans le système formel de l'arithmétique de Peano?
L'indécidabilité de ce problème signifie qu'une machine ne pourra pas nous dire si une formule est vraie ou fausse pour ce système formel axiomatique de l'arithmétique, autrement dit il y aura encore du travail pour les mathématiciens !

Par contre ce sous problème est décidable :
il existe un algorithme général qui, pour chaque formule de l'arithmétique ne faisant pas intervenir le symbole de multiplication, indique en un temps fini si oui ou non la formule en question est démontrable ou pas (Presburger 1930).

Remarque sur les 2 notions d'indécidabilité :
On parle de problème indécidable (au sens algorithmique), un tel problème représente une infinité d'énoncés car il y a une infinité de valeurs possibles pour les entrées.
Par exemple au problème « un nombre est-il premier ? » correspond les énoncés « 2 est premier » « 3 est premier » « 4 n'est pas premier » etc...
Ce problème est décidable car il existe au moins un algorithme qui permet d'y répondre.
Au sens de Gödel, un énoncé est décidable (au sens logique) par rapport à une théorie si on peut le démontrer ou démontrer sa négation à partir de cette théorie.
Le lien entre les 2 notions est le suivant :
Si un problème est indécidable (au sens algorithmique) et si on considère une théorie ou un système de démonstrations, alors il existe au moins un énoncé vrai du problème qui est indécidable (au sens logique de Gödel) par rapport à cette théorie.

Retour au sommaire

Des mathématiciens célèbres:
Evidemment cette liste est loin d'être exhaustive et pour chaque mathématicien il y a un lien sur leur page Wikipédia.

De plus, internet n'étant pas la source unique pour tout, j'ai utilisé l'excellent ouvrage de Bertrand Hauchecorne et Daniel Surratteau édité chez ellipses et intitulé « Des mathématiciens de A à Z » qui comporte plus de 700 biographies. Les deux auteurs, agrégés de mathématiques, enseignent en classes préparatoires scientifiques.

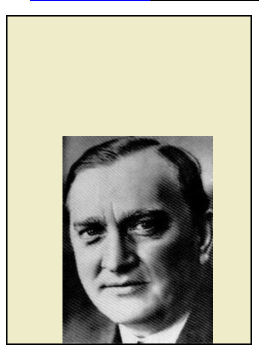
Abel Niels Henrik (1802 en Norvège-1826)



Pauvre, il meurt jeune de la tuberculose. Ses travaux ne sont pas reconnus de son vivant à leur juste valeur en particulier par Cauchy et Gauss. Il reçoit à titre posthume le prix de Mathématiques de l'institut de France.
On lui doit notamment la démonstration de l'impossibilité de résoudre par radicaux des équations algébriques de degré 5.
Un prix porte son nom.

Retour au sommaire

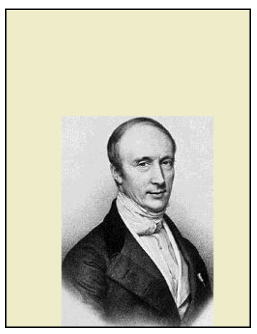
Banach Stefan (1892 près de Cracovie-1945)



Il crée la société de mathématiques à Cracovie, la revue Studia Mathématica et la société mathématique de Pologne.
Professeur à l'école polytechnique, il commence les publications sous le titre de Mathematical Monographs.
Il subit l'occupation nazie puis soviétique et meurt malade en 1945.
Il est l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle et approfondit la théorie des espaces vectoriels topologiques (On parle d'espace de Banach aujourd'hui).
De nombreux théorèmes portent son nom.

Retour au sommaire

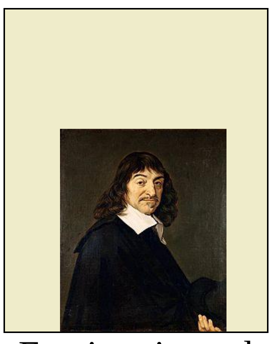
Cauchy Augustin Louis (1789 à Paris-1857)



Mathématicien reconnu et prolifique, il fonde de nombreuses œuvres charitables.
Ses opinions politiques et religieuses, lui valent des ennuis, en effet, royaliste dévoué à Charles X, il refuse de prêter serment au nouveau roi Louis-Philippe comme l'exige la loi du 31 août 1830 ; il part en exil entre 1830 et 1838.
Même s'il a un rôle déterminant pour les mathématiques du XIXe siècle, il n'a pas compris l'importance des travaux d'Abel et de Galois, précurseurs des mathématiques du XXe siècle.
Son nom intervient dans de nombreuses notions (suite de Cauchy, critère de Cauchy, loi de Cauchy, théorème de Cauchy etc…).
Il travaille aussi en optique, en mécanique et en astronomie.

Retour au sommaire

Descartes René (1596 à la Haye (royaume de France) –1650)

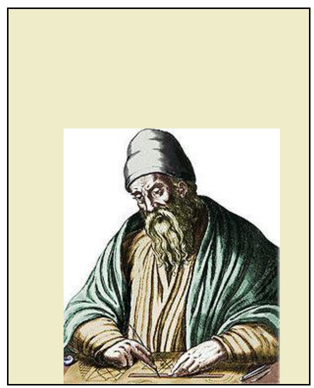


Esprit universel, il est philosophe (enfant, son père l'appelle son petit philosophe), mathématicien, adhère à l'héliocentrisme, et par prudence, en apprenant la condamnation de Galilée, ne publie pas le traité du monde et de la lumière.
Il est le tuteur de la reine Christine et à sa demande ils se retrouvent tous les matins à 5h pour philosopher, ce qui perturbe Descartes habitué à se lever tardivement.
Les raisons de son décès en Suède restent mystérieuses et sa dépouille est rapatriée en France à la demande de Louis XIV.
On lui doit des formules célèbres dont « *cogito ergo sum* » (je pense donc je suis).

Il introduit une écriture symbolique des équations. (Il n'utilise pas le signe égal mais un autre symbole)
L'adjectif cartésien employé fréquemment montre toute l'influence de la pensée du philosophe.

Retour au sommaire

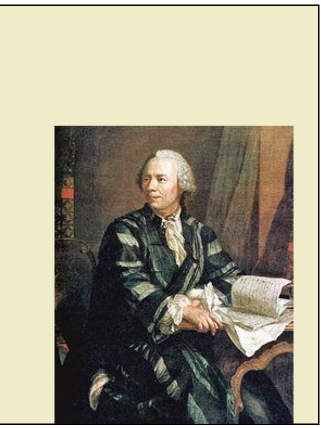
Euclide (-320,-275)



On sait très peu de choses sur la vie d'Euclide.
On lui doit les éléments ouvrage qui est une sorte de compilations des connaissances mathématiques de l'époque.
Son nom intervient dans plusieurs domaines : algorithme d'Euclide, géométrie euclidienne, division euclidienne etc…

Retour au sommaire

Euler Leonhard (1707 à Bâle-1783)

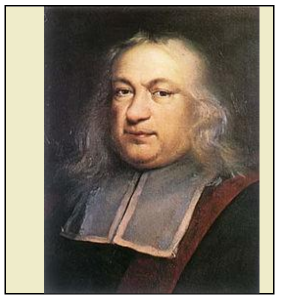


D'une mémoire extraordinaire : il pouvait par exemple réciter l'*Énéide* (10 000 vers) de Virgile, du début à la fin, sans hésitation, et pour chaque page de son édition, il pouvait citer la première ligne et la dernière**.**
Mathématicien mais aussi physicien et astronome, il travaille à l'académie des sciences de Saint Petersburg fondée par Pierre le grand et pendant 25 ans à l'académie de Berlin où il écrit plus de 380 articles.

Malgré le prestige qu'il apporte à l'académie, il doit quitter Berlin à cause d'une mésentente avec Frédéric II qui préfère son cercle de philosophes dont fait partie Voltaire.
Il est très lié à la famille Bernoulli.
Il devient presqu'aveugle à la fin de sa vie.
Son nom intervient dans bien des domaines : théorème d'Euler dans les graphes, droite d'Euler, formule d'Euler, constante d'Euler, indicatrice d'Euler etc…
On lui doit les notations : e (nombre d'Euler), i, sin(x), cos(x), f(x) pour une fonction, $\sum$,et popularise l'utilisation de π.

Retour au sommaire

Pierre de Fermat(début du XVII[e] siècle dans le Tarn et Garonne-1665)



Magistrat, il s'occupe essentiellement de mathématiques mais aussi de physique.
Il est aussi poète, latiniste et helléniste.
Il a une correspondance régulière avec Mersenne mais se querelle plusieurs fois avec Descartes.
Il renâcle à détailler ses démonstrations comme il l'avoue lui-même :
« *J'ay si peu de commodité d'escrire mes démonstrations, que je me contente d'avoir découvert la vérité et de sçavoir le moyen de la prouver, lorsque j'auray le loisir de le faire.* »
ou encore
« *Je ne doute pas que la chose n'eût pu se polir davantage, mais je suis le plus paresseux de tous les hommes.* »
L'exemple le plus célèbre est le grand théorème de Fermat, démontré par Wiles en 1995 :
« *Au contraire, il est impossible de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré : j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir.* »
Son nom intervient par exemple en arithmétique : petit théorème de Fermat, nombres de Fermat.

Retour au sommaire

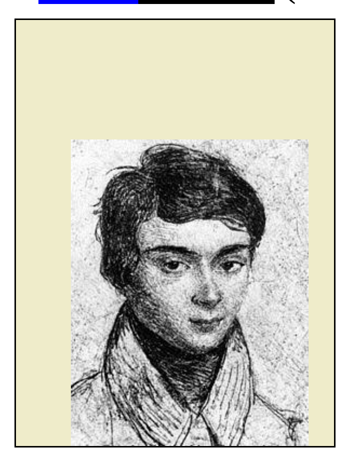
***Fourier* Joseph** (1768 à Auxerre, 1830)



Mathématicien et physicien son parcours est étonnant.
Fils d'un artisan, il se voit offrir des études car l'un de ses ancêtres est béatifié puis canonisé.
Il poursuit des études à Paris puis devient novice à l'abbaye de Saint-Benoit-sur-Loire où il ne prononce pas ses vœux.
Il préfère enseigner à Auxerre puis en 1794 étudie à la toute nouvelle école normale supérieure. Un an après il enseigne à l'école polytechnique.
Il participe à l'expédition d'Egypte de Napoléon en 1798 et devient préfet en 1801.
Il est élu à l'académie des sciences en 1816, récusé par Louis XVIII, il est réélu l'année suivante et en devient le secrétaire perpétuel.
En 1826 il entre à l'académie française.
Il travaille sur la théorie de la chaleur en physique et sur les séries trigonométriques et les équations différentielles en mathématiques.
Il meurt d'une crise cardiaque parce qu'il chauffe excessivement son logis pensant que la chaleur pourrait le guérir alors qu'il est malade !
On lui doit un ouvrage sur la théorie analytique de la chaleur et bien sûr son nom est intimement lié aux séries trigonométriques : séries de Fourier, transformée de Fourier, formule d'inversion de Fourier.
Tout étudiant en sciences aura à manipuler les séries trigonométriques !

Retour au sommaire

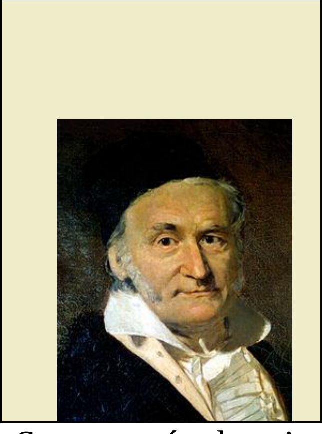
***Galois* Evariste** (1811 à Bourg la Reine-1832)



Prodige en mathématiques avec un caractère trempé, militant politique, il a des aptitudes reconnues par ses professeurs, même si son attitude peut être dérangeante comme le signale ce relevé de notes de son professeur de mathématiques:
« C'est la fureur des mathématiques qui le domine ; aussi je pense qu'il vaudrait mieux pour lui que ses parents consentent à ce qu'il ne s'occupe que de cette étude ; il perd son temps ici et n'y fait que tourmenter ses maîtres… »
Il propose deux mémoires qui n'ont pas été retenus, l'un à Cauchy sur les fractions continues périodiques, et l'autre à Poisson, qui le trouve trop compliqué, sur les équations résolubles par radicaux.
Pourtant ce dernier, retrouvé par Liouville en 1843, contient le fondement de théories nouvelles comme les groupes, même si lui ne les utilisent pas explicitement.
Il meurt tragiquement d'un duel stupide à 21 ans :
« j'ai été provoqué par deux patriotes ... il a été impossible de refuser », « Je meurs victime d'une infâme coquette ».
On retrouve son nom dans le groupe et le corps de Galois et l'extension galoisienne.

Retour au sommaire

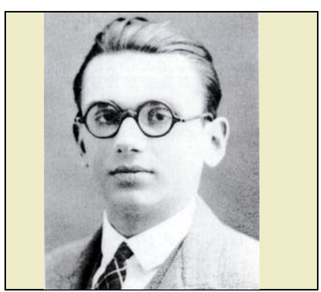
Gauss Carl Friedrich (1777 à Brunswick en Allemagne-1855)



Surnommé « le prince des mathématiques », on lui de nombreux et importants travaux scientifiques.
Mathématicien, physicien, astronome, son génie est reconnu de son vivant même s'il ne publie qu'une partie de ses travaux.
On retrouve son nom dans de nombreux domaines comme en arithmétique avec le théorème de Gauss ou encore en probabilité avec la loi de Laplace-Gauss et la courbe de Gauss.
Un prix de mathématiques en son honneur, le prix Carl Friedrich Gauss est décerné tous les 4 ans depuis 2006.

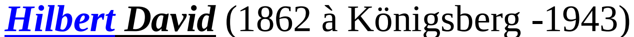
Retour au sommaire

***Gödel* Kurt** (1906 en république tchèque-1978)

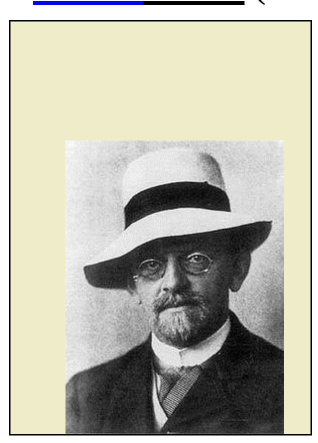


Il est logicien et connu principalement pour ses théorèmes d’incomplétude.
Il part se réfugier aux états unis en 1940 où il rencontre Einstein qui devient un de ses témoins pour la nationalisation américaine.
Ses théorèmes d’incomplétude ont un impact retentissant en mathématiques puisqu’ils ont pour conséquence, entre autre, que tout n’est pas démontrable. C’est donc une assurance des mathématiques quelque peu malmenée en 1931.
Un prix Gödel, qui récompense les meilleurs travaux en informatique théorique, est fondé en son honneur en 1992.

Retour au sommaire



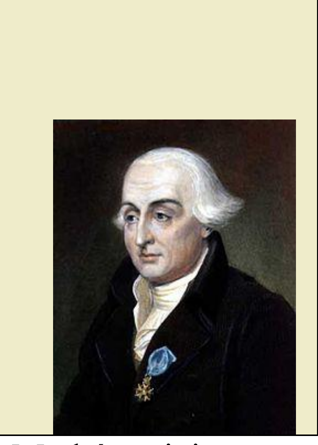
***Hilbert* David** (1862 à Königsberg -1943)



Avec Henri Poincaré, il est considéré comme l’un des plus grands mathématiciens du XXe siècle.
Après l’université de Königsberg, il devient professeur de 1895 à 1930 à l’université de Göttingen considérée comme la meilleure université au monde en mathématiques.
Ses travaux sont nombreux et on lui doit la célèbre liste de 23 problèmes posés en 1900 à Paris.
On parle d’espace hilbertiens et préhilbertiens ainsi que de base hilbertienne.
Il y a plusieurs théorèmes de Hilbert.

Retour au sommaire

***Lagrange* Joseph-Louis** (1735 à Turin-1813)



Mathématicien reconnu, il s’installe à Berlin et est nommé directeur de la classe de mathématiques à l’académie, à la suite d’Euler ;
Le roi de Prusse Frédéric II voulait que « *le plus grand roi d'Europe » ait « le plus grand mathématicien d'Europe ».*
Il s’installe à Paris, appelé par Louis XVI, et n’est pas inquiété pendant la révolution, ce qui n’est pas le cas par exemple de Lavoisier qui est exécuté.
Il travaille dans de nombreux domaines (arithmétique, probabilités, algèbre, théorie des nombres, calcul infinitésimal, géométrie, mais aussi en physique ou en mécanique céleste).
C’est en 1788 qu’il publie son principal et célèbre ouvrage : *« Mécanique analytique »*
Il est l’un des pères du système métrique.
On lui doit, entre autre, la méthode de Lagrange, le théorème de Lagrange, la formule de Taylor-Lagrange, le lagrangien.

Retour au sommaire



Pierre Simon de Laplace (1749 à Beaumont-en-Auge, 1827)



Mathématicien, physicien, astronome, c’est l’un des grands scientifiques de l’époque napoléonienne.
Fils d’un propriétaire terrien, il obtient le titre de Comte de l’empire par Napoléon puis marquis après la restauration des Bourbons.

A 20 ans quand il arrive à Paris, il rencontre d'Alembert qui lui procure un poste de professeur de mathématiques à l'école royale militaire.
Il travaille en astronomie mathématique et en mécanique céleste, c'est l'un des premiers à concevoir les trous noirs.
Il est un fervent défenseur du déterminisme causal :
« Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'Analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle et l'avenir, comme le passé serait présent à ses yeux. »
Il travaille aussi sur la théorie des probabilités.
Il explicite l'intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}.$
Des notions mathématiques portent son nom :
Le Laplacien, la loi de Laplace Gauss, la transformée de Laplace …

Retour au sommaire

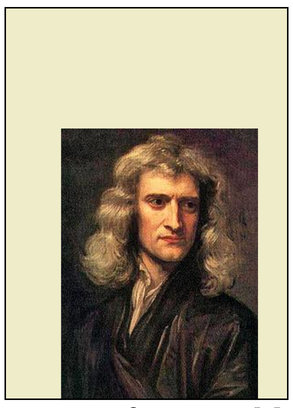
***Leibniz* Gottfried Wilhelm** (1646 à Leipzig – 1716)



Philosophe, mathématicien et physicien il est aussi connu comme étant l'un des fondateurs du calcul infinitésimal avec Newton, avec qui il eut une querelle sur l'antériorité de la découverte.
Il s'intéresse aux équations différentielles linéaires et utilise le premier les déterminants.
On lui doit de nombreuses notations :$\frac{dy}{dx}$ où d signifie différentiation,$\int$, le point pour la multiplication , : pour la division.
Il généralise avec Newton l'emploi de =
Des formules portent son nom.

Retour au sommaire

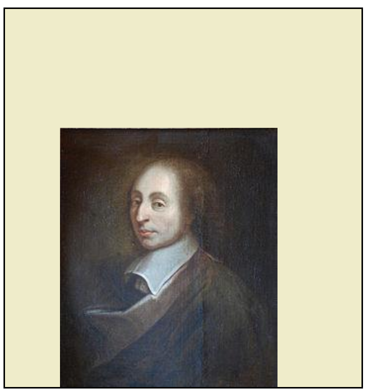
***Newton* Isaac** (1643-1727)



Scientifique emblématique, il est philosophe, mathématicien, physicien, astronome, théologien mais aussi alchimiste et franc-maçon.
Personnage complexe et tourmenté, il se consacre exclusivement à ses travaux dans sa jeunesse sans en publier les résultats.
Devenant un homme public et reconnu, il publie ses travaux comme le plus célèbre *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*.
Il fait publier ses travaux sur la lumière 20 ans après les avoir faits !
Il est anobli par la reine Anne en 1705.
Il est considéré comme l'un des plus grands savants de l'histoire humaine.

Retour au sommaire

***Pascal* Blaise** (1623 à Clermont ferrand-1662)

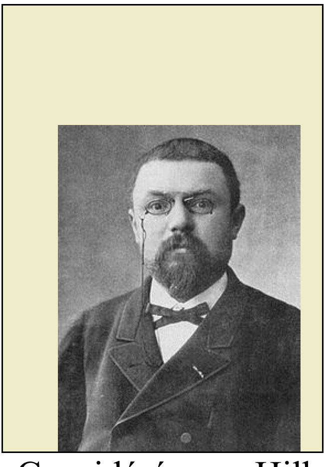


Enfant précoce, il invente à 18 ans la première machine à calculer.
Esprit universel, il est philosophe, théologien, mathématicien, s'intéresse aussi aux sciences physiques.
A la fin de sa vie il est malade, souffre de violentes migraines mais ne veut pas se faire soigner.
Il défend l'ordre des jansénistes de Port Royal où se trouve sa sœur.
Cet ordre est interdit par Louis XIV en 1661.
« Ses pensées » ne sont pas achevées à sa mort et de nombreux écrits ont été retrouvés dans ses affaires.
C'est seulement au XIX[e] siècle que ses pensées sont publiées intégralement, une partie ayant été cachée ou modifiée après sa mort.

Contemporain de Descartes, il s’en démarque en particulier sur la vision de Dieu.
Descartes s’attache à en démontrer l’existence, tandis que Pascal ne peut prouver ni son existence ni son inexistence.
Son nom intervient en mathématiques et sciences physiques (le pascal est une unité de pression, le théorème de Pascal, le triangle de Pascal etc…)
On lui doit des formules célèbres comme : « *Le cœur a ses raisons que la raison ne connaît point*.»

Retour au sommaire

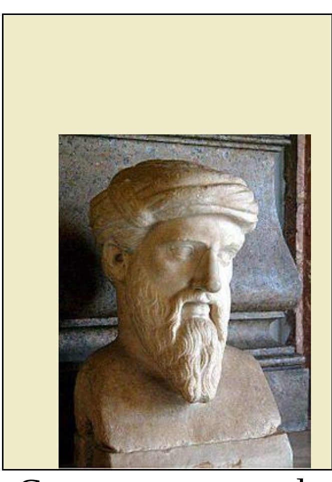
Poincaré Henri (1854 à Nancy-1912)



Considéré avec Hilbert comme l’un des plus grands mathématiciens du XXe siècle il reste cependant trop peu connu et n’a pas la reconnaissance qui lui devrait être due.
Philosophe, mathématicien, physicien, astronome, il est peut-être l’un des derniers esprits universels.
Il travaille sur le problème des 3 corps, fonde la topologie algébrique, et est un précurseur de la relativité générale.
Il s’attache à rendre accessibles ses résultats au plus grand nombre par un souci de vulgarisation.
Il émet une conjecture sur les variétés compactes qui est un des 7 problèmes du millénaire.

Retour au sommaire

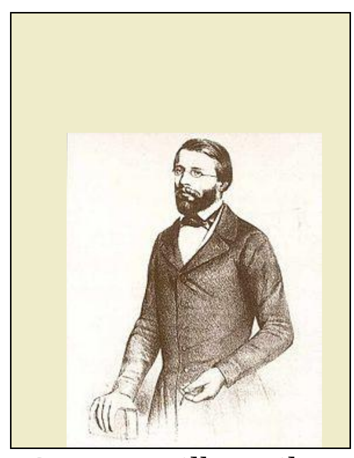
Pythagore (-569 à Samos, -500)



Connu surtout par le théorème qui porte son nom, bien que le résultat fût déjà connu avant, il fonde une école, qui est en fait un ordre, dite pythagoricienne qui considère que tout est nombre (les figures de géométrie, les sons de musique, l'âme etc…)
On peut noter que les membres de cet ordre étaient végétariens.

Retour au sommaire

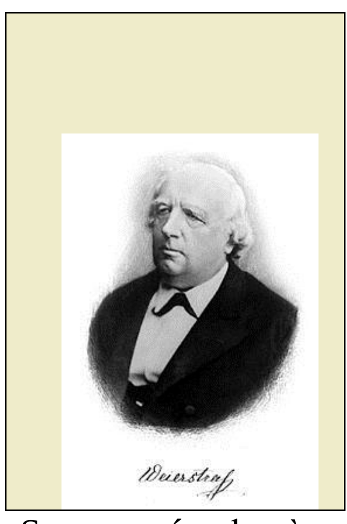
Riemann* *Bernhard (1826 royaume de Hanovre-1866)



Comme Hilbert, il est professeur à la fameuse université de Göttingen et malgré sa disparition précoce, il produit une œuvre considérable dans de nombreux champs des mathématiques (fonctions à variable complexe, fonctions abéliennes, géométrie différentielle, intégration, relativité générale, analyse des équations aux dérivées partielles, théorie des nombres etc…)
Il introduit la fonction zêta pour laquelle il émet une hypothèse qui est l'un des 7 problèmes du millénaire.
On lui doit : la somme de Riemann, l'intégrale de Riemann, la sphère de Riemann, la série et le critère de Riemann etc…

Retour au sommaire

Weierstrass* *Karl (1815 en Westphalie -1897)



Surnommé « le père de l'analyse moderne », il donne une définition rigoureuse de la limite et de la continuité comme nous les enseignons aujourd'hui.
Il introduit la notion de convergence uniforme et construit de manière rigoureuse de nouvelles fonctions à l'aide de séries entières et de produits infinis.
Il donne le premier un exemple de fonction continue partout mais dérivable nulle part.
Il s'intéresse à l'algèbre linéaire où il définit le déterminant d'une matrice.
Plusieurs théorèmes portent son nom.

Retour au sommaire

Un mot sur Bourbaki, qui n'est pas un mathématicien mais un groupe de mathématiciens français, qui entre 1939 et 1998, se donne comme mission de publier des ouvrages qui couvrent l'ensemble des connaissances mathématiques.
Il y en a une quarantaine mais depuis 1998 il n'y a plus de publication.
Les membres fondateurs sont :
Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, André Weil auxquels se joindra René de Possel.
Jean-Pierre Serre est aussi un des rédacteurs.
Le groupe a une telle influence qu'en 1969, les mathématiques modernes entrent dans les programmes d'enseignement avec la réforme Lichnerowicz.
La théorie des ensembles est introduite dès la classe de 6ième mais peu à peu abandonnée à partir de 1980 car bien trop abstraite et élitiste pour des enfants.
Cependant, dans notre enseignement actuel, Bourbaki laisse des traces par :

- un style, une façon d'écrire les mathématiques
- la vulgarisation en France des symboles ∀ et ∃, l'un venant de Gentzen et l'autre de Peano
- la vulgarisation du symbole ∅ introduit par André Weil et Claude Chevalley
- l'utilisation des symboles ⇐, ⇒ et ⇔ en logique

Retour au sommaire

La médaille Fields

Comme il n’y a pas de prix Nobel pour les mathématiques, d’autres récompenses furent créées pour la recherche mathématique.
La médaille Fields est fondée en 1923 par Fields et est décernée la première fois en 1936.
Si le prix Nobel (1901) consacre le travail d’une vie et attribue une somme importante, la médaille Fields, elle, récompense un travail ponctuel d’un « jeune » de moins de 40 ans et attribue une somme plus modeste.
De plus le prix Nobel est annuel tandis que la médaille Fields est décernée tous les 4 ans.

Les mathématiciens français sont particulièrement à l’honneur :
Laurent Schwartz en 1936
Jean Pierre Serre en 1954
René Thom en 1958
Alexandre Grothendieck en 1966 (récemment décédé le 13 novembre 2014)
Alain Connes en 1982
Pierre Louis Lions et Jean Christophe Yoccoz en 1994
Laurent Lafforgue en 2002
Wendelin Werner en 2006
Ngo Bao Châu et Cédric Villani en 2010
Arthur Avila en 2014
Soit 10 fois sur les 18 années où la médaille Fields fut attribuée.

Le prix Abel a été créé en Norvège en 2001.
Attribué tous les ans à partir de 2003, il ressemble plus au prix Nobel.

Le prix Carl Friedrich Gauss est décerné tous les 4 ans depuis 2006.

Le prix Gödel, qui récompense les meilleurs travaux en informatique théorique, est fondé en l’honneur de Gödel en 1992.

Retour au sommaire

Les mathématiques en France :

A l’occasion de l’attribution du prix Abel au mathématicien franco-russe Mikhail Gromov (c’est le dernier français ayant reçu ce prix), le Figaro publie en 2009 un article intitulé :
Pourquoi la France est une terre de Mathématiques :

« Les mathématiciens français collectionnent les prix les plus prestigieux, à l'instar de Mikhaïl Gromov récompensé jeudi par le prix Abel. Cette réussite repose sur une forte autonomie et une mobilité dans les carrières.

L'école française de mathématiques est une nouvelle fois à l'honneur. Le prix Abel a été attribué jeudi à Mikhaïl Gromov, un mathématicien d'origine russe naturalisé français en 1992, professeur permanent depuis cette date à l'Institut des hautes études scientifiques (IHES) de Bures-sur-Yvette (Essonne). L'Académie norvégienne des sciences et des lettres l'a distingué «pour ses contributions révolutionnaires à la géométrie». Le prix est doté de 700 000 € environ.

Mikhaïl Gromov est «l'un des plus grands mathématiciens vivants», témoigne Laurent Laf-forgue, Médaille Fields 2002. Ses recherches portent sur la théorie géométrique fondamentale et n'ont donc aucune interaction directe avec l'extérieur. «Il est difficile de trouver quelque chose qui puisse le résumer pour le grand public», admet du coup Stéphane Jaffard, professeur à l'université Paris-XII et président de la Société mathématique de France (SMF). Mikhaïl Gromov lui-même a d'ailleurs regretté un jour que «trop peu de personnes étudient mon travail assez profondément pour comprendre les pensées sous-jacentes».

C'est un fait indiscutable : les Français collectionnent les récompenses internationales en mathématiques comme le prix Abel ou la médaille Fields. Ils se classent juste derrière les Américains, mais, proportionnellement au nombre d'habitants, ils sont de loin les premiers. C'est sans équivalent dans les autres disciplines. Ces prix prestigieux sont un indicateur de la qualité de ce qui se fait de mieux dans la recherche française. Mais c'est à tous les niveaux que les mathématiques en France sont fortes et dynamiques, souligne Stéphane Jaffard, de l'IHES aux professeurs de collège ou d'université.

«Pratiques vertueuses»

Les Français, par exemple, sont très présents au Congrès international de mathématiques qui a lieu tous les quatre ans (le dernier en date s'est tenu en 2006 à Madrid). Ils sont chaque fois près d'une trentaine à être invités, indique le président de la SMF. De même, leurs publications sont bien représentées dans les trois plus grandes revues internationales : Inventiones Mathematicae, Acta Mathematica, éditées par Springer, et Annals of Mathematics, éditée par l'université de Princeton (États-Unis).

La communauté mathématique française compte un peu plus de 3 700 chercheurs et enseignants-chercheurs. On dit volontiers que la région parisienne abrite actuellement la plus forte concentration mondiale de mathématiciens. On y trouve non seulement l'IHES et l'institut Henri-Poincaré (IHP) mais aussi les très grands départements de mathématiques des universités Paris-VI (300 chercheurs et enseignants-chercheurs), Paris-VII et Paris-Sud Orsay (autour de 150 chacune). Mais il y a aussi des départements importants en province, comme à Toulouse (210), Strasbourg (120) et Grenoble. On compte en outre une quarantaine d'unités mixtes de recherche avec le CNRS ou l'Inria, à Bordeaux, Lyon, Lille, Rennes, etc.

Les budgets de fonctionnement de la recherche en mathématiques sont modestes, comparés à ceux de la physique ou de la biologie. Mais cela ne suffit pas à expliquer les réussites françaises. Il y a toute une série de «pratiques vertueuses» dans l'évolution des carrières qui favorisent le dynamisme et les échanges. Contrairement à ce qui se passe dans d'autres disciplines, un maître de conférences n'est pas recruté dans son propre laboratoire d'origine.

De même, il est de règle au CNRS que les mathématiciens ne restent pas plus de cinq ou six ans en poste. «Cette règle non écrite est fondamentale : elle favorise le brassage d'idées», analyse Stéphane Jaffard. Ce dynamisme va de pair avec une forte autonomie. Alors que les Américains sont souvent amenés de travailler dans des domaines très reconnus et balisés, comme les équations aux dérivées partielles, omniprésentes dans la modélisation, les Français peuvent travailler dans des domaines apparemment plus farfelus, comme la théorie des nœuds, ou même les pliages de feuilles de papier. C'est aussi ce qui fait leur originalité. »

L'IHES, pépinière atypique de génies scientifiques

Mikhaïl Gromov, chercheur d'exception

Pour le mathématicien Laurent Lafforgue, médaille Fields 2002, le fait que Mikhaïl Gromov reçoive le prix Abel est "plus que légitime". Ses talents font l'unanimité dans la communauté mathématique. "Gromov est issu de l'école russe. Il est l'un de ses plus grands représentants, même si nous sommes très heureux et fiers qu'il ait choisi de vivre en France, poursuit Laurent Lafforgue. Paris l'a attiré en particulier en tant que ville du monde où l'on fait le plus de mathématiques. De 1945 à 1970, la France a dominé les mathématiques mondiales puis l'école russe a pris le relais. Ce n'est pas un hasard si trois des six professeurs de l'Institut des hautes études scientifiques (IHES) sont d'origine russe." Laurent Lafforgue observe d'autre part : "Je crois savoir que Gromov travaille beaucoup de tête. C'est sa personnalité mathématique, très différente de celle d'Alexander Grothendieck, la première et plus grande gloire de l'IHES, qui menait toute sa recherche en écrivant."

Retour au sommaire

Quelques notations mathématiques :

$\lim_{n\to\infty}(\quad)$ par Godfrey Harold Hardy (1877-1947) en 1908

∞ par Wallis (1616-1703) en 1655
$dx\ et\ \frac{dy}{dx}, \int \quad , \int dy = y$, le point pour la multiplication, : pour la division , la généralisation de l'emploi du signe =, par Leibniz (1646-1716)

f '(x) pour la dérivée première, f "(x) pour la dérivée seconde, etc., par Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Les lettres x et y pour les inconnues et a et b pour les paramètres, les exposants et en général l'écriture symbolique des équations par Descartes (1596-1650) (sauf x^2 qu'il écrit xx et = qu'il écrit ꝏ)

= par Recorde en 1557

i pour $\sqrt{-1}$, e, sin(x), cos(x), f(x) pour une fonction, $\sum$, et la popularisation de l'utilisation de π par Euler (1707-1783)

$\exists$ par Peano (1858-1932)

$\forall$ par Gentzen (1909-1945)

$\emptyset$ par André Weil et Claude Chevalley au XX[e] siècle

$\overrightarrow{AB}$ par Hamilton vers 1850

le point pour le produit scalaire et le $\wedge$ pour le produit vectoriel par Gibbs en 1881

Retour au sommaire